
Introduction à l'Algèbre Géométrique

(Algèbre de Clifford réelle)

— **Outils maths** —

Guillaume Gisbert

26/01/2024

Motivation

- Est-ce qu'on peut multiplier des vecteurs entre eux ?
 - Produit scalaire ? $\Rightarrow$ scalaire
 - Produit vectoriel ? $\Rightarrow$ uniquement en dimension 3
-
- Et les complexes ? et autres quaternions, octonions ...
 - Ils représentent des points de dimension 2 (resp. 4, 8)
 - Ils sont isomorphes à $\mathbb{R}^2$?
 - Et pourtant on peut les multiplier entre eux ...

L'histoire des algèbres vectorielles



1798 - Wessel
Nombres complexes



1844 - Grassmann
Algèbre extérieure



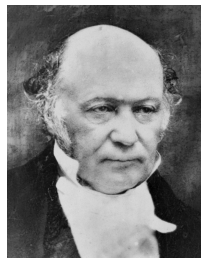
1928 - Pauli
Matrices de Pauli



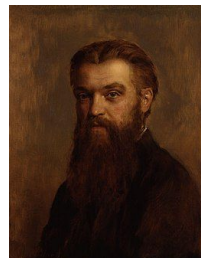
1637 - Descartes
Coordonnées cartésiennes



1843 - Hamilton
Quaternions



1878 - Clifford
Algèbre de Clifford



Quaternions

- $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$
- Représenter des points 3D en ajoutant la multiplication et la division
- Frobenius montre en 1877 que c'est impossible en 3 dimensions

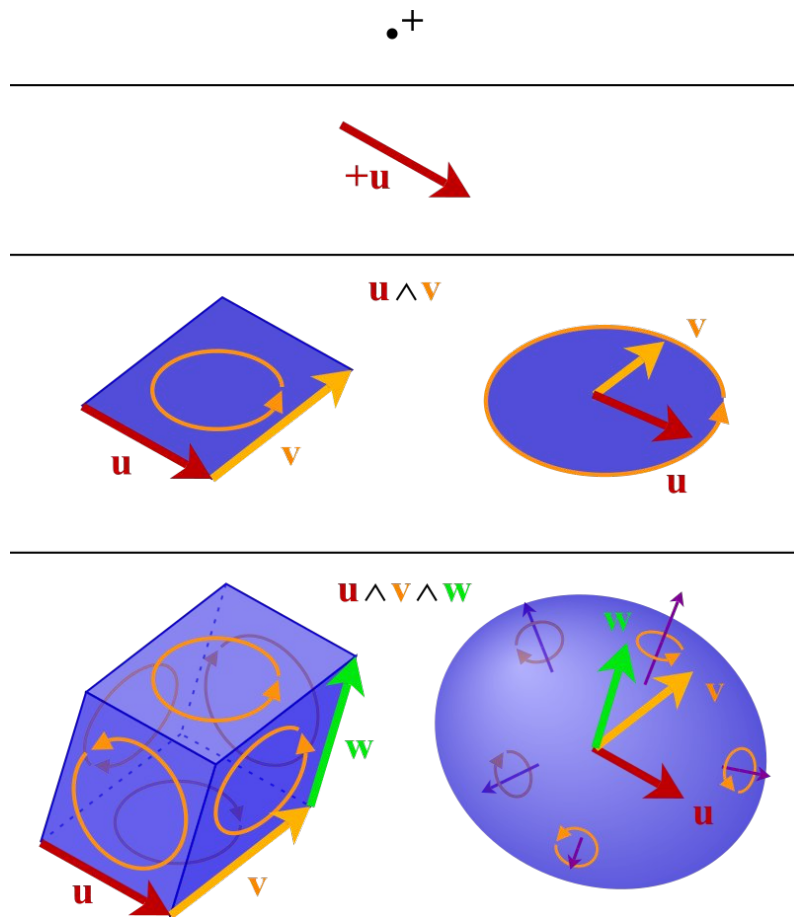
$\downarrow \times \rightarrow$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	- j
j	j	- k	-1	i
k	k	j	- i	-1

Table de multiplication des quaternions [1]

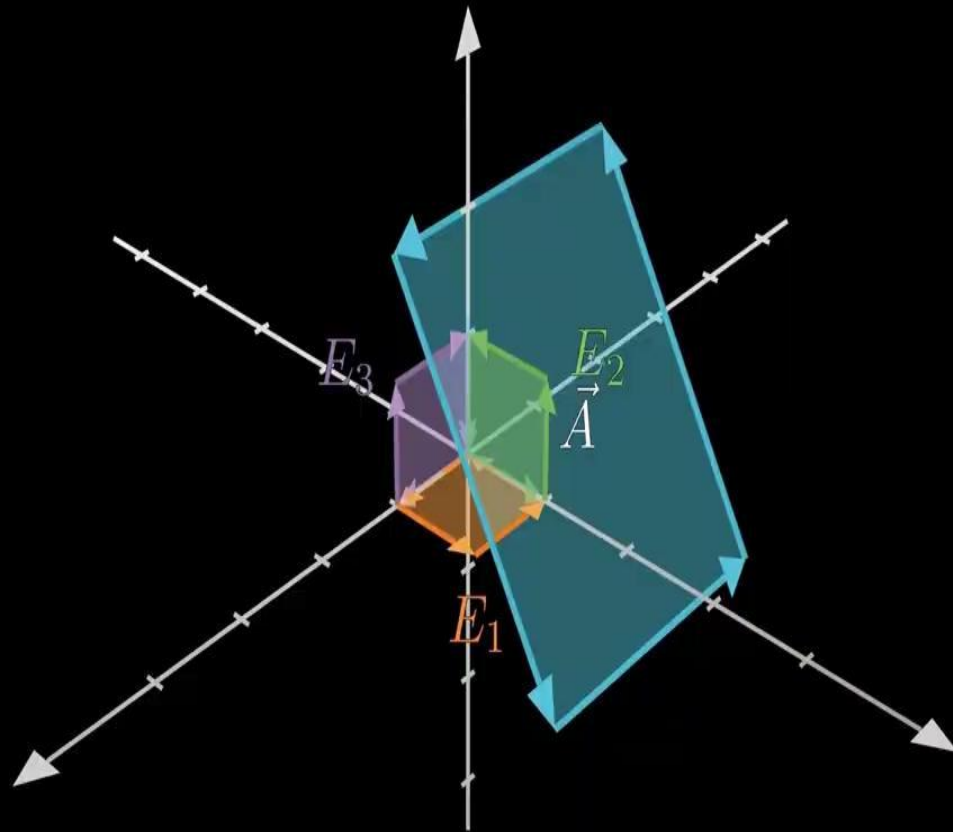
- Non commutatif & 4ème dimension
- Application principale : rotations

Algèbre extérieure

- Scalaire : 0D
 - Vecteur : 1D
 - Bivecteur : 2D
 - Trivecteur : 3D
 - k-vecteur : kD
-
- Sens, direction et norme

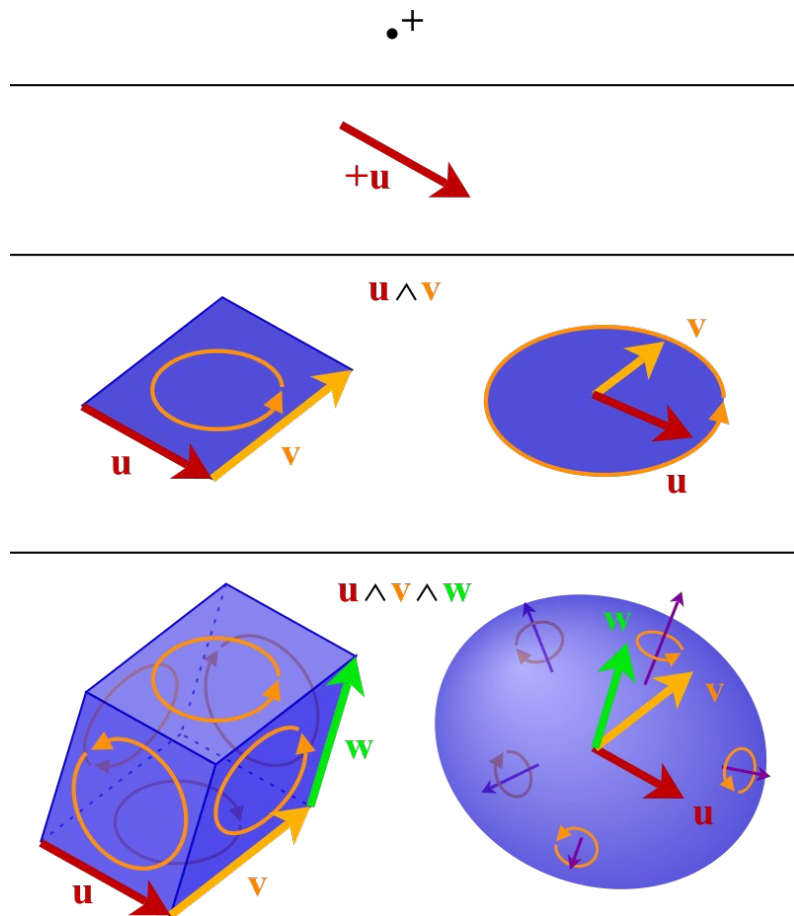


Construction de k-vecteurs à partir de vecteurs [2]



Algèbre extérieure

- Produit extérieur : $u \wedge v$
- Anticommutatif
- $u \wedge u = 0$
- $\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \sin(\theta)$
- N'a pas de forme



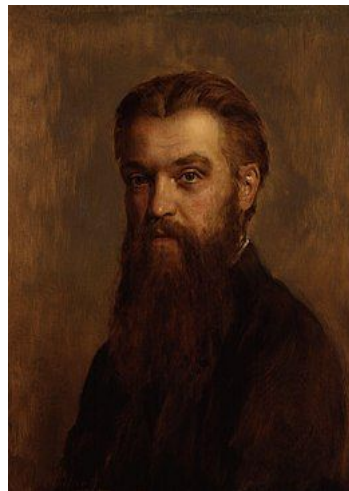
Construction de k-vecteurs à partir de vecteurs [2]

Algèbre Géométrique ou Algèbre de Clifford réelle

Produit géométrique :

$$uv = u.v + u \wedge v$$

u et v étant des k -vecteurs



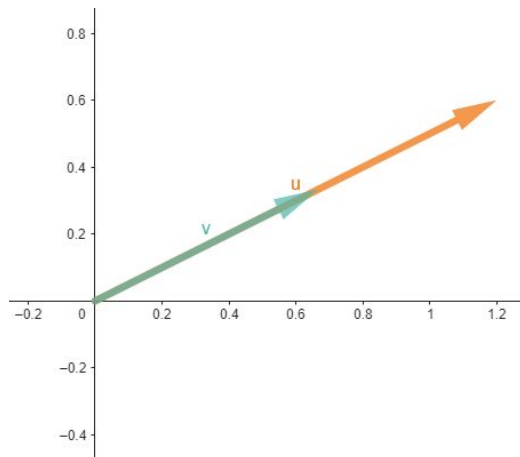
William Kingdon Clifford



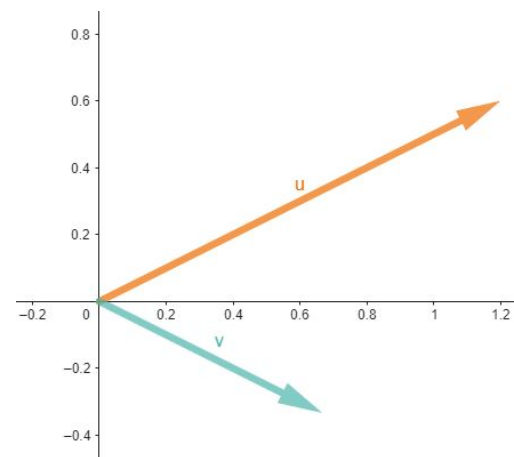
David Hestenes

Produit Géométrique

- Quelques propriétés : $uv = u.v + u \wedge v$
- $u^2 = \|u\|^2$
- $u^{-1} = \frac{u}{\|u\|^2}$
- $u.v = \frac{uv + vu}{2}$
- $u \wedge v = \frac{uv - vu}{2}$



Inverse d'un vecteur (algèbre géométrique)



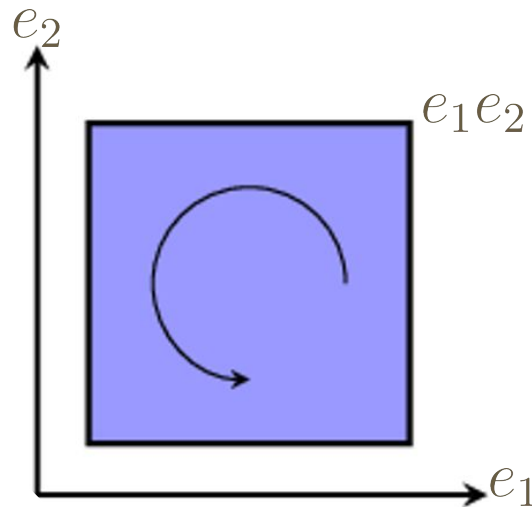
Inverse d'un nombre complexe

Produit Géométrique

- Vecteurs de la base canonique : $uv = u.v + u \wedge v$
- $e_i^2 = \|e_i\|^2 = 1$
- $e_i e_j = e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i = -e_j e_i, \quad (i \neq j)$
- Vecteurs quelconques (en dimension 3) :
- $uv = (x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2 + z_1 \mathbf{e}_3)(x_2 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + z_2 \mathbf{e}_3)$
- $uv = x_1 x_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + x_1 y_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + x_1 z_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + y_1 x_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + y_1 y_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + y_1 z_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + z_1 x_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + z_1 y_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 + z_1 z_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3$
- $uv = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + (y_1 z_2 - z_1 y_2) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + (x_1 z_2 - z_1 x_2) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3$

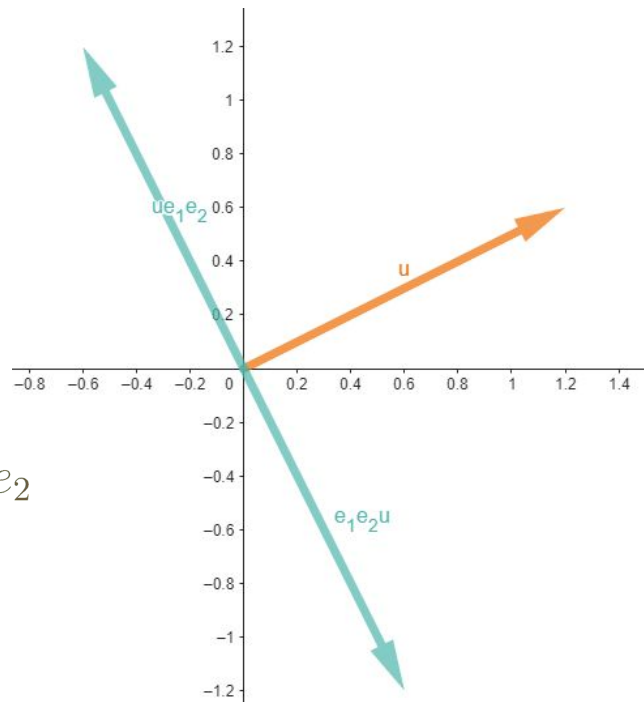
Description de l'espace

- **Espace 2D :**
- 1 scalaire : a
- 2 vecteurs : e_1, e_2
- 1 bivecteurs $e_1 e_2$ (pseudo-scalaire)
- **Multivecteur :**
- $M = a + v + B$
- Noté $\mathcal{G}(2)$ ou plus précisément $\mathcal{G}(2, 0, 0)$



Etude de $\mathcal{G}(2)$ - Lien avec les nombres complexes

- $M = a + be_1 + ce_2 + de_1e_2$
- $e_i e_j^2 = e_i e_j e_i e_j = -e_i e_j e_j e_i = -e_i e_i = -1$
- $ue_1e_2 = (ae_1 + be_2)e_1e_2 = ae_2 - be_1e_2e_2 = -be_1 + ae_2$
- $e_1e_2u = be_1 - ae_2$
- $(a + be_1e_2)(c + de_1e_2) = (ac - bd) + (ad + bc)e_1e_2$
- $\mathcal{G}^+(2) \cong \mathbb{C}$



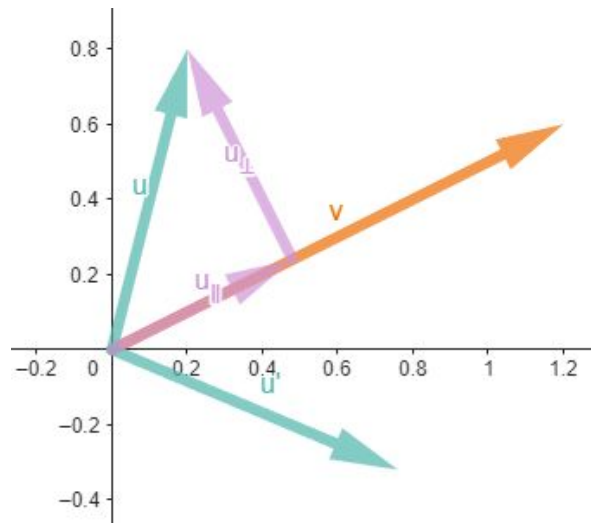
Etude de $\mathcal{G}(2)$ - Lien avec les nombres complexes

- On pose : $e_1 e_2 = I$
- $uv = \|u\| \|v\| \cos(\theta) + \|u\| \|v\| \sin(\theta) I$
- $uv = \|u\| \|v\| (\cos(\theta) + \sin(\theta) I) = \|u\| \|v\| e^{I\theta}$
- De manière générale :
 - $x(\phi) e^{I\theta} = (\cos(\phi) e_1 + \sin(\phi) e_2) (\cos\theta + \sin(\theta) I) = x(\phi + \theta)$
 - $e^{I\theta} x(\phi) = x(\phi - \theta)$
- Le produit géométrique de 2 vecteurs représente une rotation

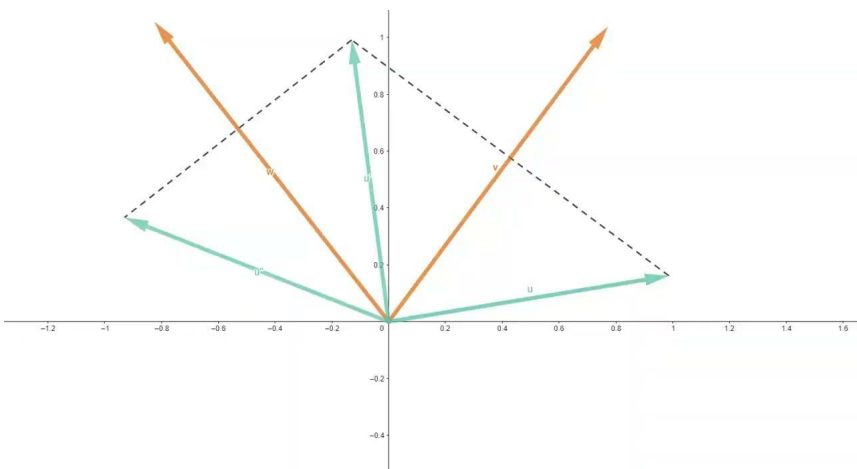
Etude de $\mathcal{G}(2)$ - Réflexion

- Prenons un autre chemin, généralisable aux dimensions supérieures ...

- $u = u_{\parallel} + u_{\perp}$
- $u' = u_{\parallel} - u_{\perp}$
- $vu' = vu_{\parallel} - vu_{\perp}$
- $vu' = u_{\parallel}v + u_{\perp}v$
- $vu' = (u_{\parallel} + u_{\perp})v$
- $vu' = uv$
- $v^{-1}vu' = v^{-1}uv$
- $u' = v^{-1}uv$



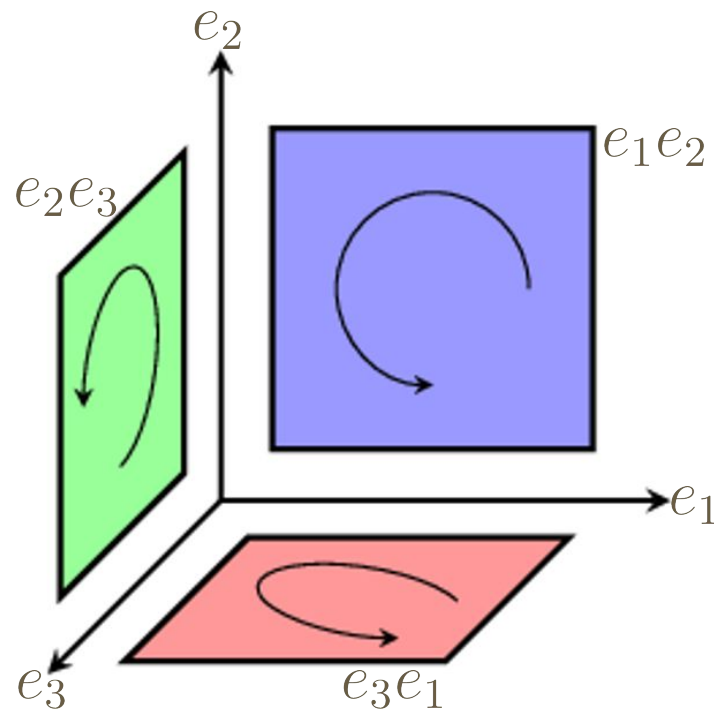
Etude de $\mathcal{G}(2)$ - Rotation



- $u' = v^{-1}uv$
- $u'' = w^{-1}u'w$
- $u'' = (w^{-1}v^{-1})u(vw)$
- $u'' = (vw)^{-1}u(vw)$
- Or: $vw = \|v\|\|w\|e^{\theta I}$
- $u'' = \left(\frac{1}{\|v\|\|w\|}e^{-\theta I}\right)u(\|v\|\|w\|e^{\theta I})$
- $u'' = e^{-\theta I}ue^{\theta I}$

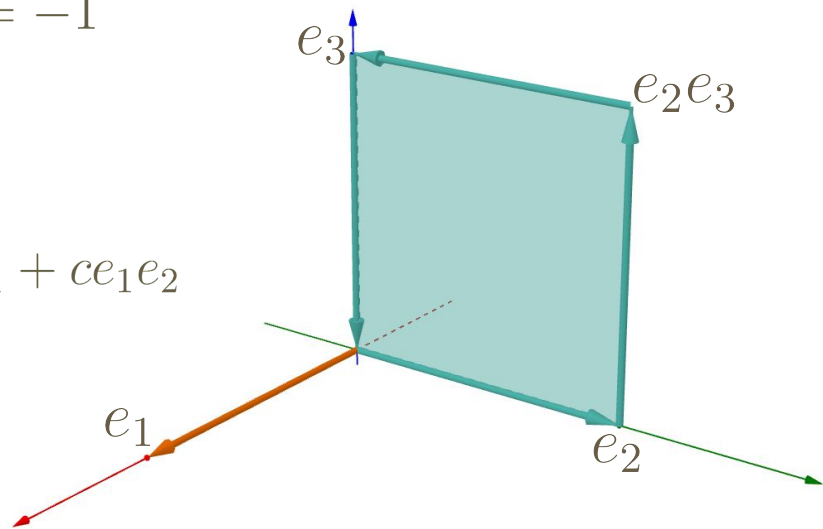
Description de l'espace

- **Espace 3D :**
- 1 scalaire : a
- 3 vecteurs : e_1, e_2, e_3
- 3 bivecteurs : e_1e_2, e_2e_3, e_3e_1 (pseudo-vecteur)
- 1 trivecteur : $e_1e_2e_3$ (pseudo-scalaire)
- **Multivecteur :**
- $M = a + v + B + T$
- Noté $\mathcal{G}(3)$ ou plus précisément $\mathcal{G}(3, 0, 0)$



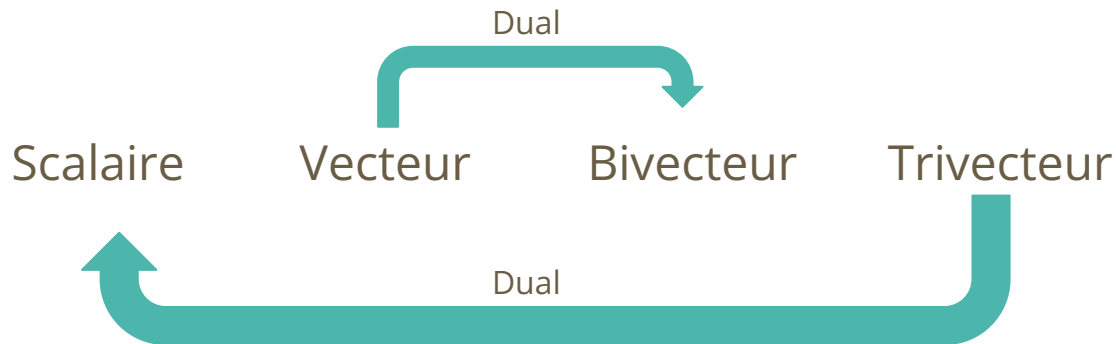
Etude de $\mathcal{G}(3)$

- $e_1 e_2 e_3 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = -e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 = e_2 \wedge e_3 \wedge e_1$
 $= -e_3 \wedge e_2 \wedge e_1 = -e_3 e_2 e_1$
- $e_1 e_2 e_3^2 = e_1 e_2 e_3 e_1 e_2 e_3 = -e_1 e_2 e_3 e_3 e_2 e_1 = -1$
- Produit avec un vecteur :
 - $(ae_1)(e_1 e_2 e_3) = ae_2 e_3$
 - $(ae_1 + be_2 + ce_3)(e_1 e_2 e_3) = ae_2 e_3 + be_3 e_1 + ce_1 e_2$
- Relation vecteur/bivecteur orthogonal :
 - $ve_1 e_2 e_3 = B$
 - $-v = Be_1 e_2 e_3$



Etude de $\mathcal{G}(3)$ - Relation avec le produit vectoriel

- Dualité :



- Produit vectoriel / Produit vectoriel :
- $u \wedge v = (x_1y_2 - y_1x_2)e_1e_2 + (y_1z_2 - z_1y_2)e_2e_3 + (x_1z_2 - z_1x_2)e_1e_3$
- $u \times v = (x_1y_2 - y_1x_2)e_3 + (y_1z_2 - z_1y_2)e_1 - (x_1z_2 - z_1x_2)e_2$

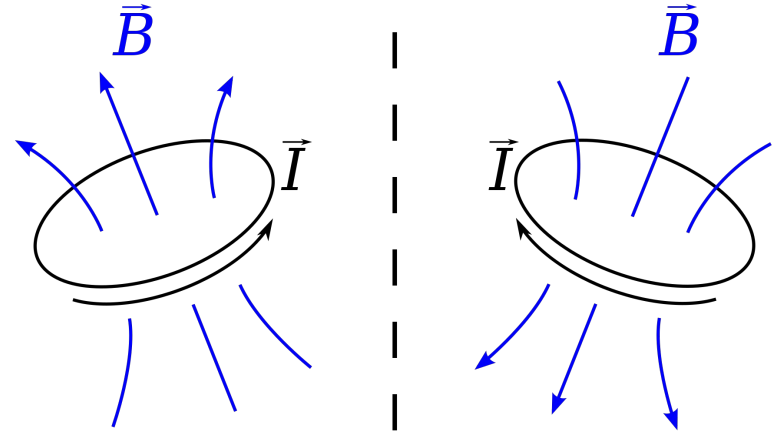
Etude de $\mathcal{G}(3)$ - Relation avec le produit vectoriel

- Produit vectoriel / Produit vectoriel :
- $u \wedge v = (x_1y_2 - y_1x_2)e_1e_2 + (y_1z_2 - z_1y_2)e_2e_3 + (x_1z_2 - z_1x_2)e_1e_3$
- $u \times v = (x_1y_2 - y_1x_2)e_3 + (y_1z_2 - z_1y_2)e_1 - (x_1z_2 - z_1x_2)e_2$
- $(u \wedge v)e_1e_2e_3 = -u \times v$
- Le produit vectoriel est le dual du produit extérieur (en 3D)

Spécificités du produit vectoriel

- **Vecteur axial / polaire :**
- Le sens de certains vecteurs dépend de l'orientation de l'espace
- Typiquement issus du produit vectoriel

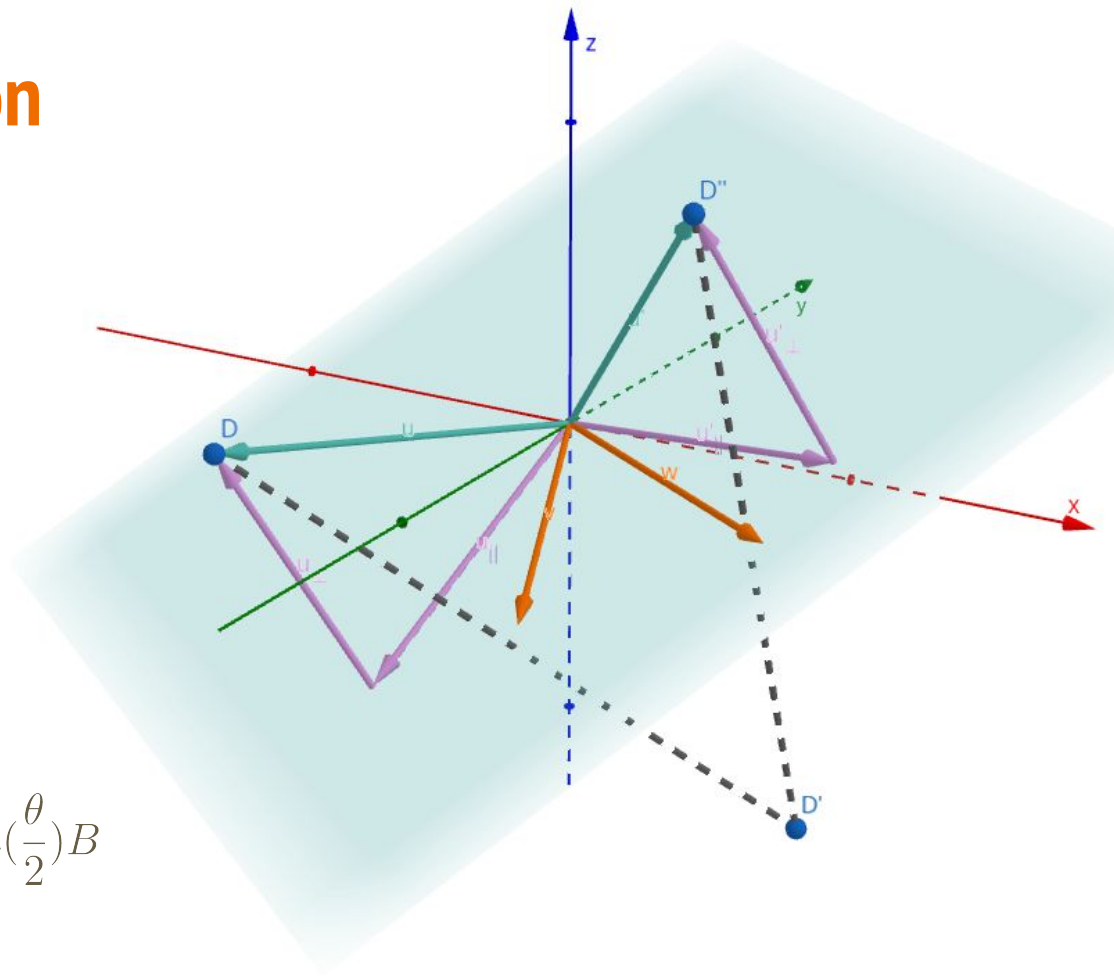
- **Exemples :**
- Champ magnétique
- Moment d'une force (rotation)
- Rotation autour d'un axe qu'en 3D



Courant I et son champ magnétique B induit. une symétrie inverse le sens de B [4]

Etude de $\mathcal{G}(3)$ - Rotation

- $u' = wvuvw$
- $u' = wv(u_{\parallel} + u_{\perp})vw$
- $u' = wvu_{\parallel}vw + wvu_{\perp}vw$
- $u' = wvu_{\parallel}vw + u_{\perp}wvvw$
- $u' = u'_{\parallel} + u_{\perp}$
- **Rotor :**
 - $R = wv, \quad \|w\| = \|v\| = 1$
 - $u' = RuR^{\dagger}, \quad R^{\dagger} = vw$
 - $R^{\dagger} = \|v\|\|w\|\cos(\frac{\theta}{2}) + \|v\|\|w\|\sin(\frac{\theta}{2})B$
 - $R^{\dagger} = e^{\frac{\theta}{2}B}$
 - $u' = e^{-\frac{\theta}{2}B}ue^{\frac{\theta}{2}B}$



Etude de $\mathcal{G}(3)$ - Relation avec les quaternions

- **Observation :**

- $e_1 e_2^2 = e_2 e_3^2 = e_1 e_3^2 = -1$

- $e_1 e_2 e_2 e_3 e_1 e_3 = -1$

- $M = a + b e_1 e_2 + c e_2 e_3 + d e_1 e_3 \leftrightarrow q = a + b i + c j + d k$

- $\mathcal{G}^+(3) \cong \mathbb{H}$

- $u' = e^{-\frac{\theta}{2}B} u e^{\frac{\theta}{2}B} \quad u' = e^{\frac{\theta}{2}n} u e^{-\frac{\theta}{2}n}$

$\downarrow \times \rightarrow$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Table de multiplication des quaternions [1]

Matrices de Pauli

- Appliquons l'algèbre géométrique sur quelques exemples en physique

- $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

σ_j		e_j
Multiplication de matrices	$\Leftrightarrow$	Produit géométrique

$$\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = 2i\sigma_3 \quad \Leftrightarrow \quad e_1e_2 - e_2e_1 = 2Ie_3$$

Matrices de Pauli

- Vecteur de matrices : $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$
- Produit avec un vecteur $u = ae_1 + be_2 + ce_3$

$$\sigma.u = a\sigma_1 + b\sigma_2 + c\sigma_3$$

- Identité :

$$(\sigma.u)(\sigma.v) = (u.v)I + i\sigma.(u \times v)$$

$$uv = u.v + u \wedge v$$

- Invention d'une algèbre spécialisée généralisée par l'algèbre géométrique

Equations de Maxwell

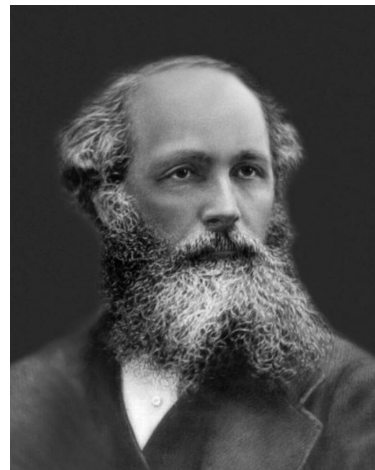
- $\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
- $\nabla \times B = \mu_0 \left(J + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$
- $\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}$
- $\nabla \cdot B = 0$

On pose :

$$\nabla_{GA} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla$$

$$\mathbf{J} = c\rho - J$$

$$F = E + icB$$



James Clerk Maxwell

Equations de Maxwell

$$\nabla_{GA} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla$$

$$\mathbf{J} = c\rho - J$$

$$F = E + icB$$

- L'unique équation :

$$\nabla F = \frac{1}{\epsilon_0 c} \mathbf{J}$$

$$- \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \right) (E + icB) = \frac{c\rho - J}{\epsilon_0 c}$$

$$- \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla E + i \frac{\partial B}{\partial t} + ic \nabla B = \frac{c\rho - J}{\epsilon_0 c}$$

$$- \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot E + \nabla \wedge E + i \frac{\partial B}{\partial t} + ic \nabla \cdot B + ic \nabla \wedge B = \frac{c\rho - J}{\epsilon_0 c}$$

Scalaire

$$\nabla \cdot E$$

$$+ \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + ic \nabla \wedge B$$

Vecteur

$$+ \nabla \wedge E + i \frac{\partial B}{\partial t}$$

Bivecteur

Trivecteur

$$+ ic \nabla \cdot B$$

Scalaire

$$= \frac{c\rho}{\epsilon_0 c}$$

$$- \frac{J}{\epsilon_0 c}$$

Vecteur

Equations de Maxwell

- $\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
- $\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + ic \nabla \wedge B = -\frac{J}{c\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + i \nabla \wedge B = -\mu_0 J$
- $\nabla \wedge E + i \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad i \nabla \times E + i \frac{\partial B}{\partial t} = 0$
- $ic \nabla \cdot B = 0 \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot B = 0$

$$\boxed{\nabla \cdot E} + \boxed{\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + ic \nabla \wedge B} + \boxed{\nabla \wedge E + i \frac{\partial B}{\partial t}} + \boxed{ic \nabla \cdot B} = \boxed{\frac{c\rho}{\epsilon_0 c}} - \boxed{\frac{J}{\epsilon_0 c}}$$

Scalaire Vecteur Bivecteur Trivecteur Scalaire Vecteur

Equations de Maxwell

- $\nabla . E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
- $\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + ic \nabla \wedge B = -\frac{J}{c\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times B = -\mu_0 J$
- $\nabla \wedge E + i \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$
- $ic \nabla . B = 0 \quad \longrightarrow \quad \nabla . B = 0$

$$\boxed{\nabla . E} + \boxed{\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + ic \nabla \wedge B} + \boxed{\nabla \wedge E + i \frac{\partial B}{\partial t}} + \boxed{ic \nabla . B} = \boxed{\frac{c\rho}{\epsilon_0 c}} - \boxed{\frac{J}{\epsilon_0 c}}$$

Scalaire Vecteur Bivecteur Trivecteur Scalaire Vecteur

Equations de Maxwell

- $\nabla . E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
- $\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + ic \nabla \wedge B = -\frac{J}{c\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \nabla \times B = \mu_0 \left(J + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$
- $\nabla \wedge E + i \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$
- $ic \nabla . B = 0 \quad \longrightarrow \quad \nabla . B = 0$

$$\boxed{\nabla . E} + \boxed{\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + ic \nabla \wedge B} + \boxed{\nabla \wedge E + i \frac{\partial B}{\partial t}} + \boxed{ic \nabla . B} = \boxed{\frac{c\rho}{\epsilon_0 c}} - \boxed{\frac{J}{\epsilon_0 c}}$$

Scalaire Vecteur Bivecteur Trivecteur Scalaire Vecteur

Les différents modèles d'algèbre géométrique

- Vector Space Algebra $\mathcal{G}(n, 0, 0)$
- Space Time Algebra $\mathcal{G}(1, 3, 0)$
- Projective Algebra $\mathcal{G}(n, 0, 1)$
- Conformal Algebra $\mathcal{G}(n + 1, 1, 0)$
- ...

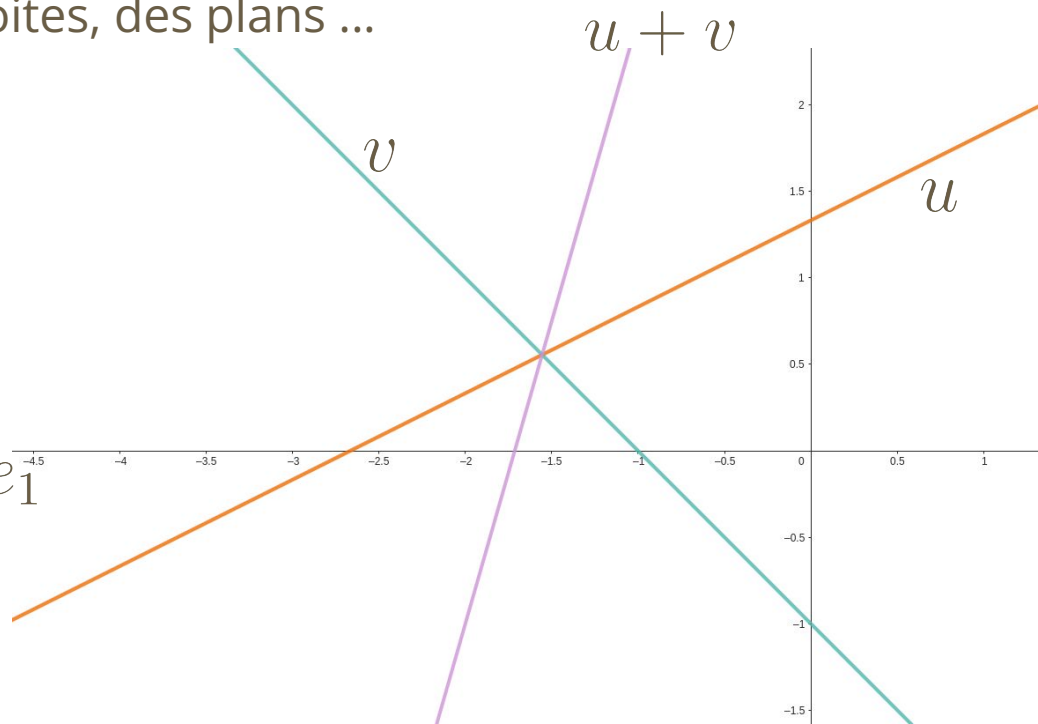
Signatures différentes : $\mathcal{G}(p, q, r)$

Algèbre Géométrique Projective

- Représenter des points, des droites, des plans ...
- Correspondance :
- $ax + by + c = 0 \leftrightarrow ae_1 + be_2 + ce_0$

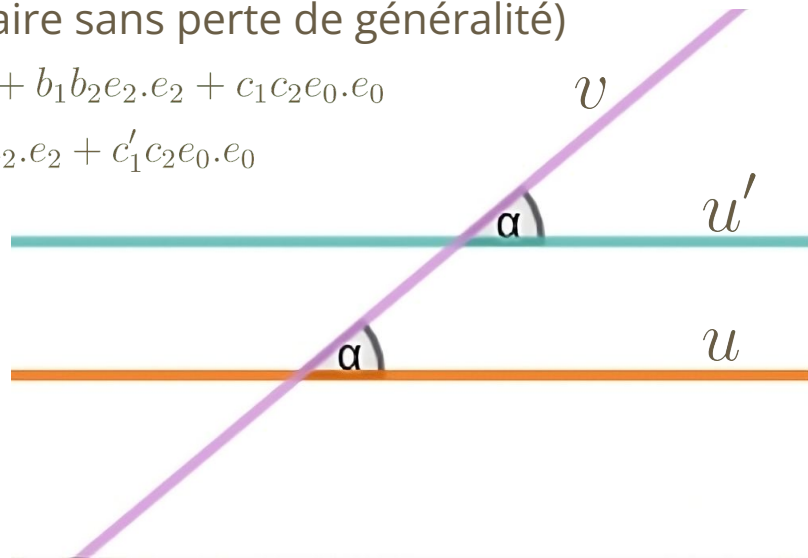
- Espace 2D :

- 1 scalaire : a
- 3 vecteurs : e_1, e_2, e_0
- 3 bivecteurs : e_1e_2, e_2e_0, e_0e_1
- 1 trivecteur : $e_0e_1e_2$
- $e_1^2 = e_2^2 = 1 \quad e_0^2 = 0$



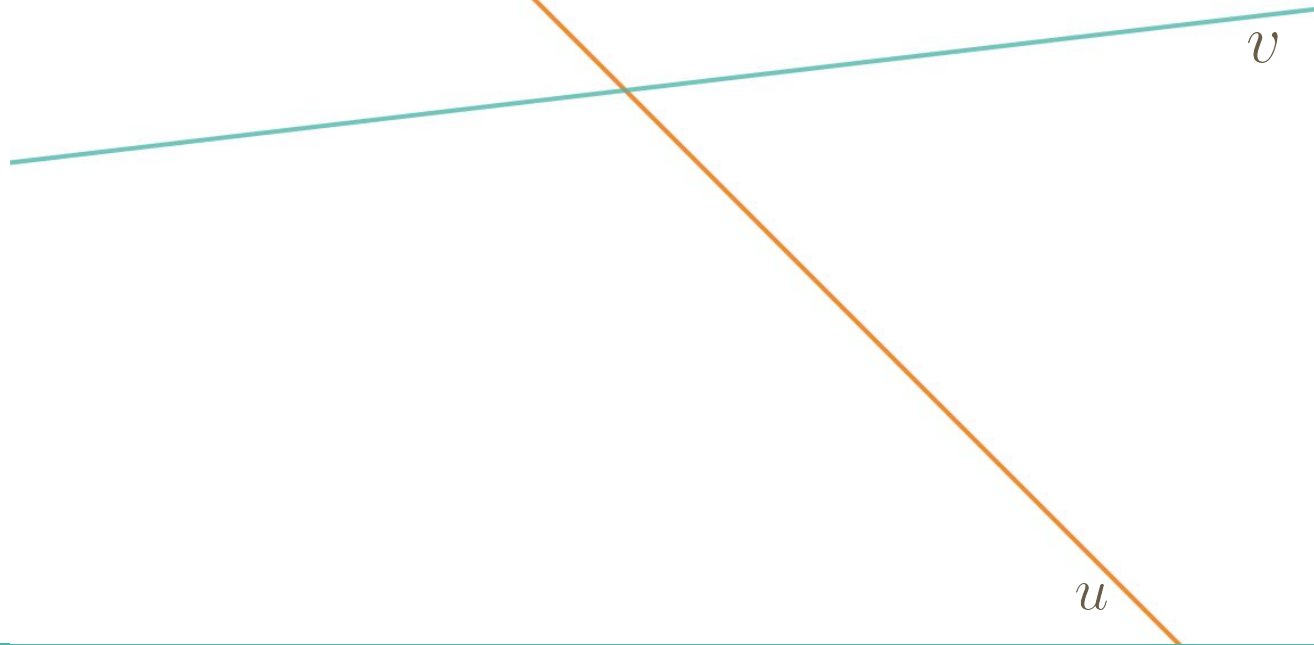
Construction d'une métrique

- Soit deux droites qui s'intersectent en un angle α
- Translater une droite ne change pas son angle avec l'autre
- $u.v = u'.v = \cos(\alpha)$ (on prend u et v unitaire sans perte de généralité)
- $(a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_0).(a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_0) = a_1a_2e_1.e_1 + b_1b_2e_2.e_2 + c_1c_2e_0.e_0$
- $\Rightarrow a_1a_2e_1.e_1 + b_1b_2e_2.e_2 + c_1c_2e_0.e_0 = a_1a_2e_1.e_1 + b_1b_2e_2.e_2 + c'_1c_2e_0.e_0$
- $\Rightarrow c_1c_2e_0.e_0 = c'_1c_2e_0.e_0$
- $\Rightarrow (c_1 - c'_1)c_2e_0.e_0 = 0$
- $\Rightarrow e_0^2 = 0$



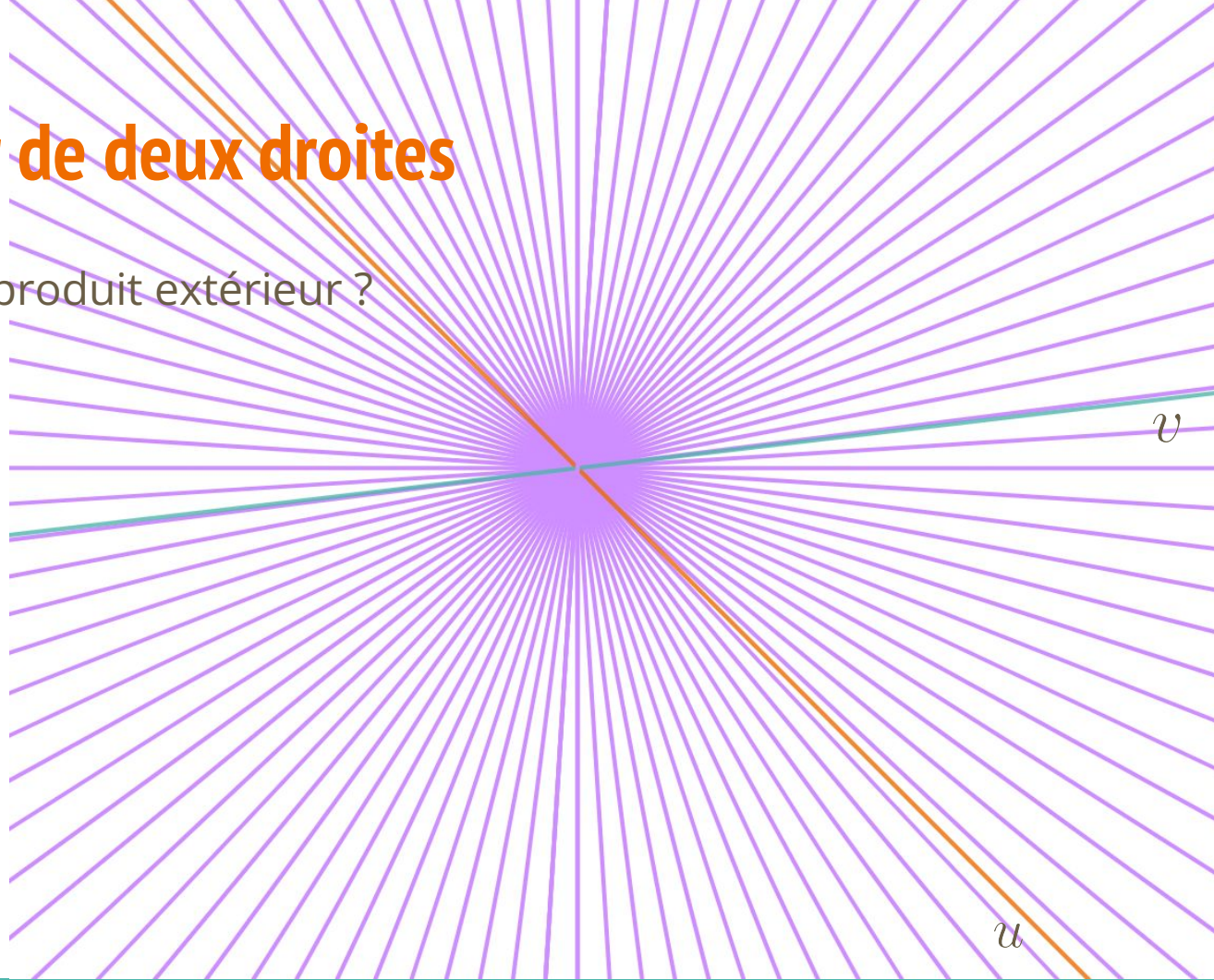
Produit extérieur de deux droites

- Que représente le produit extérieur ?
- $u \wedge v$



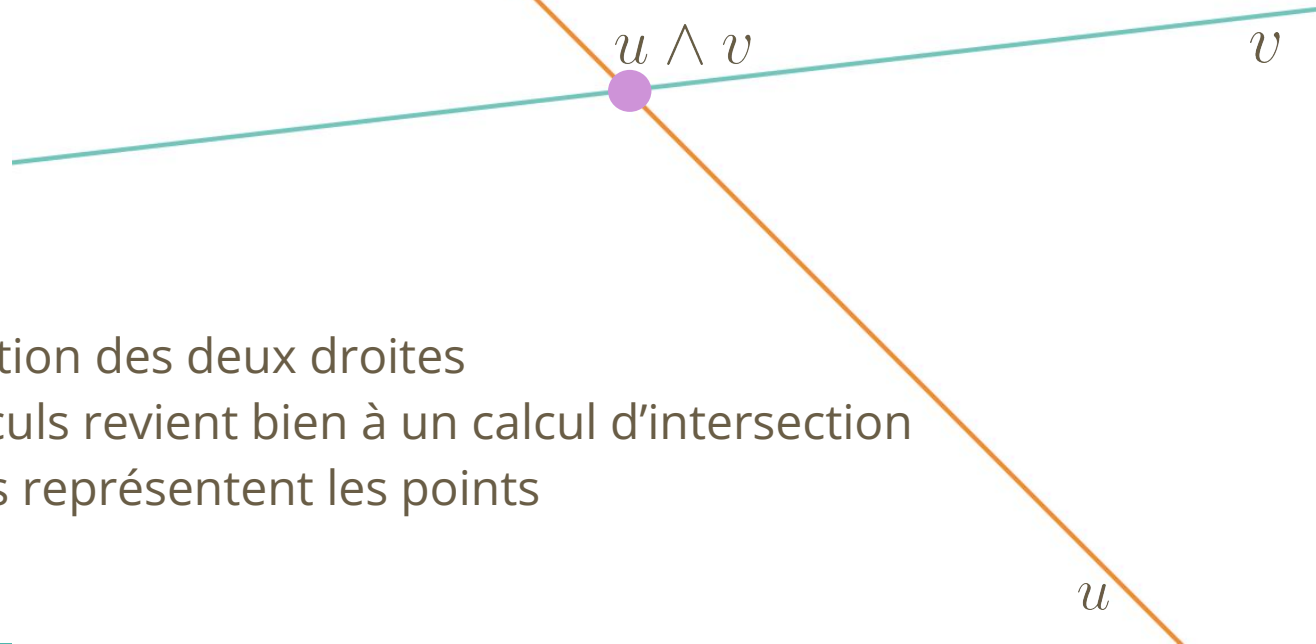
Produit extérieur de deux droites

- Que représente le produit extérieur ?
- $u \wedge v$



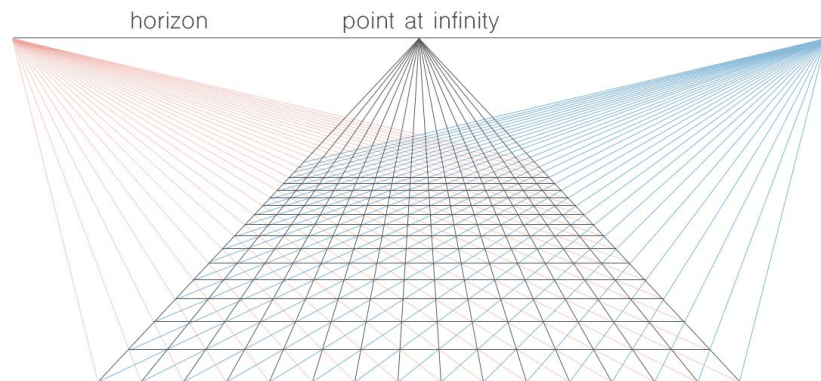
Produit extérieur de deux droites

- Que représente le produit extérieur ?
- $u \wedge v$



- Le **point** d'intersection des deux droites
- Développer les calculs revient bien à un calcul d'intersection
- Donc les bivecteurs représentent les points

Définition du point

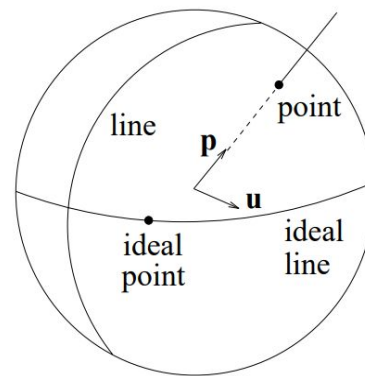


Les droites parallèles se "croisent" à l'infini

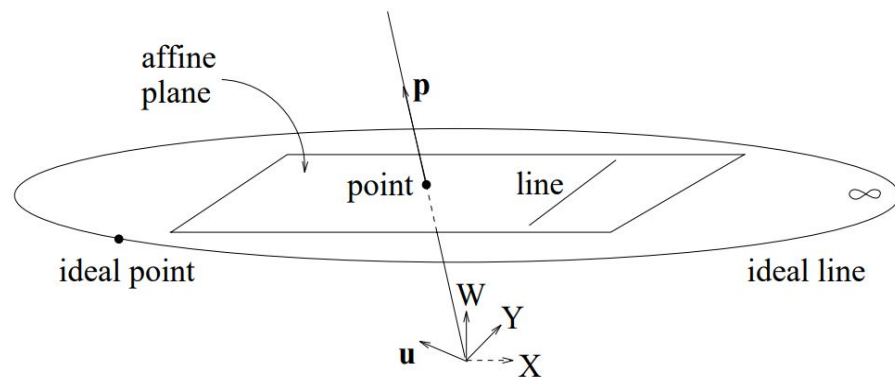
- $(x, y) \leftrightarrow e_1e_2 + xe_2e_0 + ye_0e_1$
- Normalisation :
- $ae_1e_2 + xe_2e_0 + ye_0e_1 = e_1e_2 + \frac{x}{a}e_2e_0 + \frac{y}{a}e_0e_1$
- Quand a vaut 0 => représente un point à l'infini
- Exemple :
- $(u) \wedge (u + \alpha e_0) = u \wedge u + \alpha u \wedge e_0 = \alpha(ae_1 + be_2 + ce_0) \wedge e_0$
- $\alpha(ae_1 \wedge e_0 + be_2 \wedge e_0 + ce_0 \wedge e_0) = \alpha(be_2e_0 - ae_0e_1)$

Espace projectif

- Point représenté par 3 coordonnées à 1 facteur près : $(x, y, w) = (\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, 1)$
- On peut le représenter sur la sphère unité
- Une droite se représente par un plan passant par l'origine
- Ce qui correspond à un grand cercle
- Le plan projectif est la projection de la sphère vers le plan $w = 1$



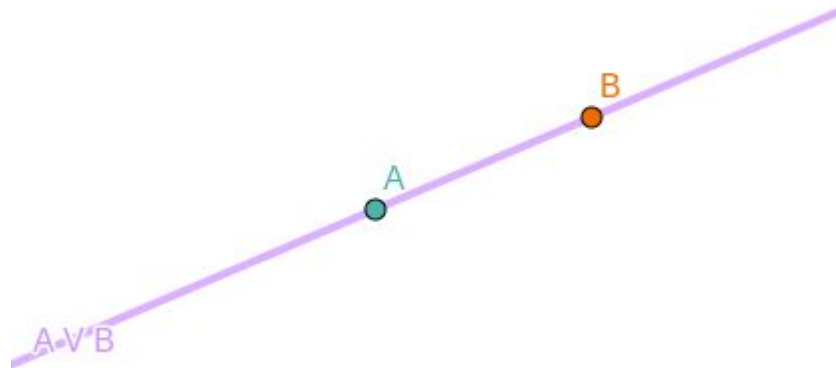
Sphère unité [5]



Plan projectif [5]

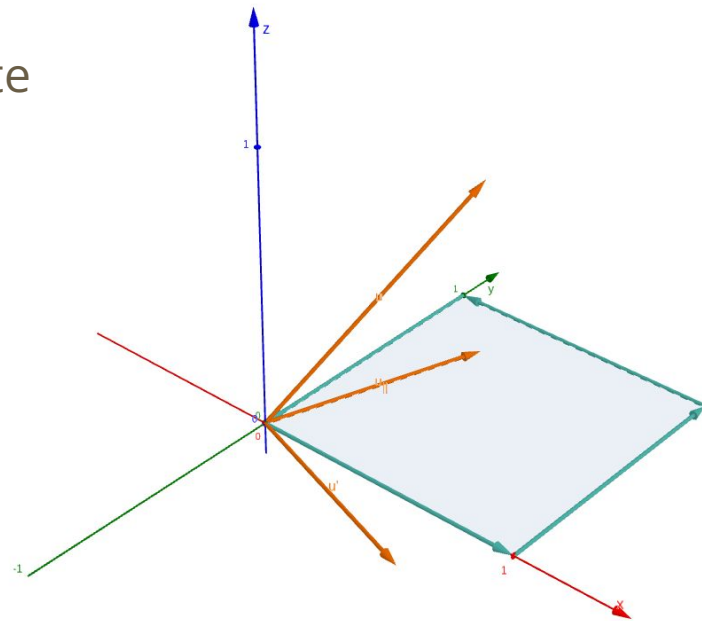
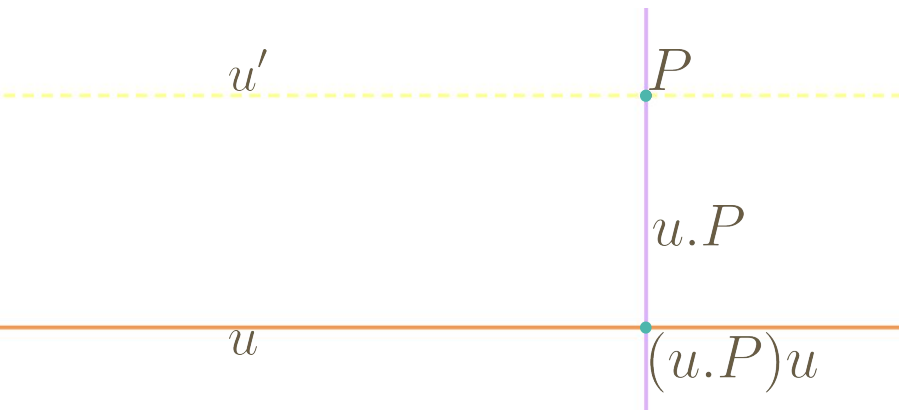
Produit régressif

- $u \vee v = *(*u \wedge *v)$
- Représente le sous espace commun
- Le produit régressif de deux points donne la droite les traversant



Produit scalaire

- Produit scalaire entre un vecteur et un bivecteur :
- $u \rfloor B = *(u \wedge *B)$
- En PGA, produit scalaire point/droite $\Rightarrow$ droite perpendiculaire passant par le point



Rotation

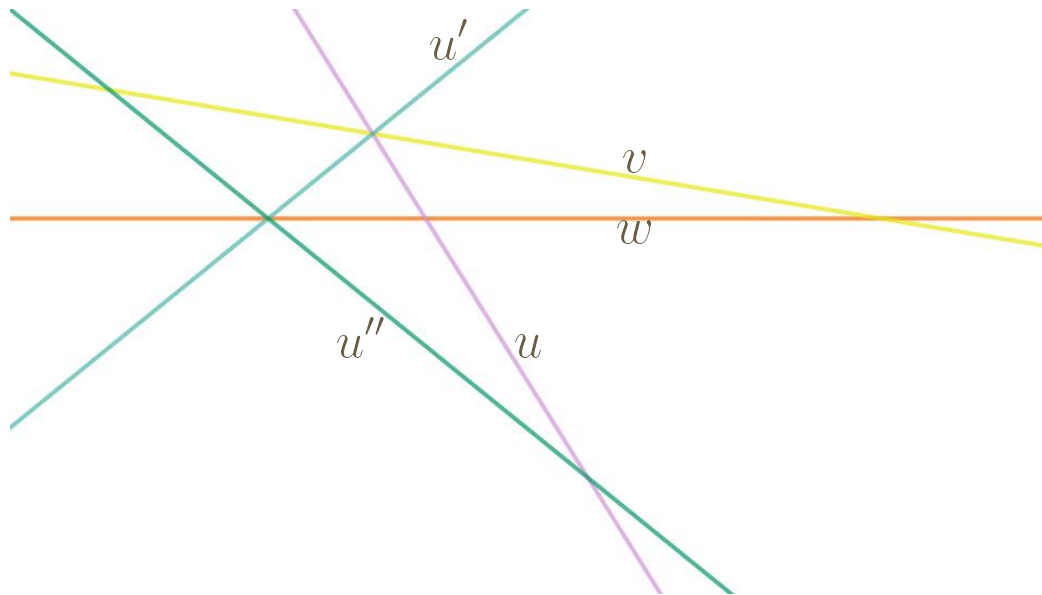
- Réflexion :

vu

- Double réflexion => rotation :

- $wvu = R^\dagger u R$

- Fonctionne avec les droites et les points
- Deux droites parallèles => translation



Et en 3D ?

- Espace 3D :
- 1 scalaire : 1
- 4 vecteurs : e_1, e_2, e_3, e_0
- 6 bivecteurs : $e_0e_1, e_0e_2, e_0e_3, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3$
- 4 trivecteurs : $e_0e_1e_2, e_0e_1e_3, e_0e_2e_3, e_1e_2e_3$
- 1 quadrivecteur : $e_0e_1e_2e_3$

- $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1 \quad e_0^2 = 0$

Plans
Droites
Points

Et en 3D ?

- Intersection :
- $A \wedge B$
- Join :
- $A \vee B$
- Projection (A sur B) :
- $(A.B)B$
- Transformations rigides :
- $R^\dagger AR$

Meet of $(\vec{a}, a)$, $(\vec{b}, b)$, and $(\vec{c}, c)$: $\frac{a\vec{c} \times \vec{b} + b\vec{a} \times \vec{c} + c\vec{b} \times \vec{a}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}$

Meet of $(\vec{a}, a)$ and $(\vec{b}, b)$: $(\vec{a} \times \vec{b} : a\vec{b} - b\vec{a})$

Meet of $(\vec{a}, a)$ and $(\vec{b}_1 : \vec{b}_2)$: $\frac{\vec{a} \times \vec{b}_2 - a\vec{b}_1}{\vec{a} \cdot \vec{b}_1}$

Join of $\vec{a}$, $\vec{b}$, and $\vec{c}$: $((\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a}), -\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))$

Join of $\vec{a}$ and $\vec{b}$: $(\vec{b} - \vec{a} : \vec{a} \times \vec{b})$

Join of $\vec{a}$ and $(\vec{b}_1 : \vec{b}_2)$: $((\vec{a} \times \vec{b}_1 - \vec{b}_2), \vec{a} \cdot \vec{b}_2)$

Project $\vec{a}$ onto $(\vec{b}, b)$: $\vec{a} - \frac{b + \vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$

Project $(\vec{a}, a)$ onto $\vec{b}$: $(-\vec{a}, \vec{a} \cdot \vec{b})$

Project $\vec{a}$ onto $(\vec{b}_1 : \vec{b}_2)$: $\frac{(\vec{a} \cdot \vec{b}_1)\vec{b}_1 + \vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{|\vec{b}_1|^2}$

Project $(\vec{a}_1 : \vec{a}_2)$ onto $\vec{b}$: $(\vec{b} \times \vec{a}_1 : \vec{a}_1)$

Project $(\vec{a}_1 : \vec{a}_2)$ onto $(\vec{b}, b)$: $(b(\vec{b} \times \vec{a}_1) - (\vec{a}_2 \cdot \vec{b})\vec{b} : \vec{b} \times (\vec{b} \times \vec{a}_1))$

Project $(\vec{a}, a)$ onto $(\vec{b}_1 : \vec{b}_2)$: $((\vec{a} \times \vec{b}_1) \times \vec{b}_1, \vec{a} \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2))$

Toutes formules d'intersections, join et projection [6]

Conclusion

- Représentation uniforme des objets à toutes les dimensions
- “Parallel-safe” : pas besoin de gérer les cas de parallélisme pour aucune des opérations
 - traitements unifiés des points finis et infinis
- Expressions pour les opérations simples, compactes et uniformes pour les objets de toutes dimensions
- Performances :
 - Produit de matrice 4×4 : 64 multiplications, 48 additions, 16 floats
 - Produit par un rotor : 48 multiplications, 40 additions, 8 floats
- Immédiatement généralisable aux dimension supérieures
- “A unified language for Mathematics and Physics” - David Hestenes
- Permet de faire des connections entre différentes notions (complexes, quaternions, matrices de Pauli, ...)
- Calcul différentiel et intégrale utilisant l’algèbre géométrique

Références

- [1] <https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion>
- [2] https://fr.wikipedia.org/wiki/Alg%C3%A8bre_ext%C3%A9rieure
- [3] https://www.youtube.com/watch?v=60z_hpEAtD8
- [4] <https://fr.wikipedia.org/wiki/Pseudovecteur>
- [5] <http://robotics.stanford.edu/~birch/projective/projective.pdf>
- [6] <https://www.youtube.com/watch?v=0i3ocLhbxJ4>
- <https://bivector.net/doc.html>
- Course notes, Geometric Algebra for Computer Graphics, SIGGRAPH 2019