

Vers de la simulation d'objets déformables

Florence Zara

Université Lyon 1 - LIRIS - équipe ORIGAMI
`florence.zara@univ-lyon1.fr`

18 octobre 2021

Simulation d'objets 1D, 2D, 3D

- ▶ Il existe différentes techniques d'animation
- ▶ On s'intéresse à l'**animation par modèles physiques** : complexe mais permet une simulation automatique et réaliste
- ▶ Boucle de simulation basée sur la **dynamique Newtonienne**
- ▶ Besoin de calculer les **forces appliquées** sur l'objet
- ▶ Forces internes de l'objet définies par son **modèle physique**
→ adapté au type d'objets à animer : fluide, objet rigide, **objet déformable**, etc.

Objets déformables : exemples

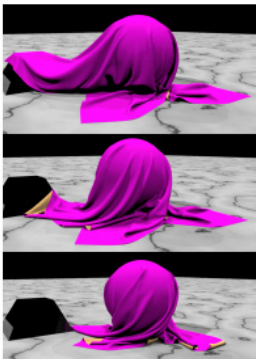
► 1D - Simulation de cheveux



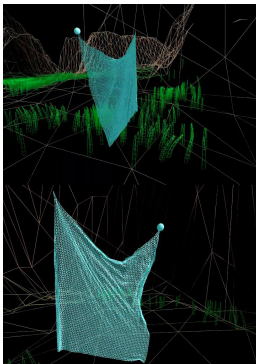
[Bertails, et. al. 2006]

Objets déformables : exemples

► 2D - Simulation de textiles



[Bridson, et. al. 2002]



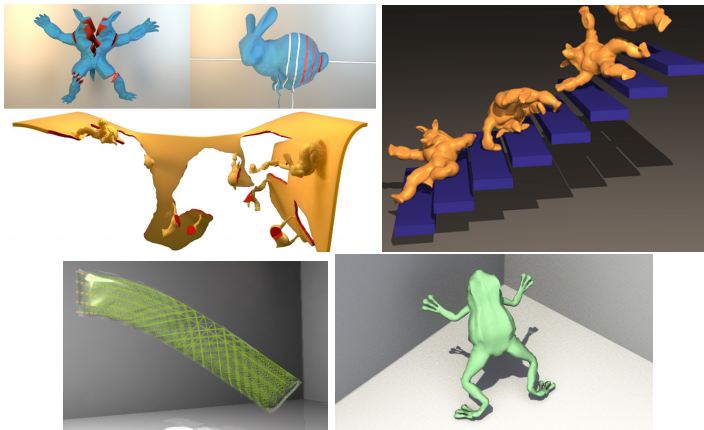
[Zara, et. al. 2003]



[INRIA ELAN 2020]

Objets déformables : exemples

► 3D - Simulation d'objets déformables divers et variés



Plan de la présentation

- 1 PFD
- 2 Objets élastiques
- 3 Paramètres d'élasticité
- 4 Système masse-ressorts

Simulation basée sur la dynamique Newtonienne

Lois de Newton

- ▶ En l'absence de toutes forces, un objet au repos reste au repos
- ▶ Première loi de Newton : le mouvement d'un objet est provoqué par les forces qui lui sont appliquées
- ▶ Seconde loi de Newton (*Principe Fondamental de la Dynamique*) :

$$\sum \text{forces}(t) = \text{masse} * \text{accélération}(t)$$
- ▶ Intégration des accélérations $\vec{a}(t)$ donne vitesse $\vec{v}(t)$ et position $\vec{x}(t)$ avec :

$$\vec{v}(t) = \int_t \vec{a}(t) dt, \quad \vec{x}(t) = \int_t \vec{v}(t) dt$$

Simulation basée sur la dynamique Newtonienne

Temps continu est discrétisé avec dt le pas de temps

Boucle de simulation - A chaque instant t :

- ▶ Calcul des **forces** (internes et externes) exercées sur l'objet : $\vec{F}(t)$
- ▶ Calcul de l'**accélération** : $\vec{a}(t) = \vec{F}(t)/m$
- ▶ Calcul des nouvelles **vitesse** $\vec{v}(t+dt)$ et **position** $\vec{x}(t+dt)$:
usage d'un schéma d'intégration numérique
- ▶ *Gestion des collisions : détection et traitement*
- ▶ Affichage de l'objet en fonction de la position calculée

Modèle physique : donne la formulation des forces dites "internes" à l'objet
Exemple : si modèle physique = système masses-ressorts, forces des ressorts

Simulation basée sur la dynamique Newtonienne

Dans le cas d'un objet rigide

- ▶ Objet rigide simplement défini par :
 - ▶ la **position de son centre de gravité**
 - ▶ la **rotation autour de son centre de gravité**
- ▶ Mouvement de l'objet rigide déterminé par :
 - ▶ la **force** appliquée sur le solide
 - ▶ le **moment** résultant de cette force
- ▶ PFD relie :
 - ▶ force/déplacement du centre de gravité
 - ▶ moment/rotation autour du centre de gravité

Simulation basée sur la dynamique Newtonienne

Dans le cas d'un objet déformable

- ▶ Position de son centre de gravité ne suffit plus !
- ▶ Besoin d'avoir position de **chaque point matériel**
- ▶ On considère un petit élément de matière dv
- ▶ On regarde les efforts appliqués sur cet élément de matière
 - ▶ forces volumiques (comme la gravité)
 - ▶ forces de surfaces appliquées sur la surface extérieure de dv

Deux cas à considérer pour dv

- ▶ Soit dv est à la surface du milieu
- ▶ Soit dv est complètement à l'intérieur du milieu
 - ▶ Efforts de surfaces sont alors engendrés par les voisins

Simulation basée sur la dynamique Newtonienne - Milieu continu

PFD appliqué à tout élément de matière/volume :

- ▶ Au temps t_0 , volume dV centré autour position X
- ▶ Au temps t , volume dv centré autour de la position $x(t)$
- ▶ Nous obtenons alors :

$$m \vec{a}(t) = m \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \rho V \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho \vec{v}(t) dv.$$

- ▶ **PFD devient :**

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho \vec{v}(t) dv = \int_{D_t} \rho \vec{f}_{ext} dv + \int_{\partial D_t} \vec{T} ds$$

- ▶ $\vec{f}_{ext} \in \mathbb{R}^3$ forces extérieures volumiques appliquées sur l'objet
- ▶ $\vec{T} \in \mathbb{R}^3$ forces appliquées sur la surface de l'objet

Vecteur de traction $\vec{T}$

- ▶ $\vec{T}$: **vecteur de contraintes ou de tractions**
- ▶ Correspond aux **forces appliquées sur le bord externe** de l'objet
- ▶ Caractérise état de contrainte = efforts intérieurs mis en jeu entre portions déformés du milieu
- ▶ $\vec{T}$ est défini pour une unité de surface ds autour de ce point :

$$\vec{T} = \sigma \cdot \vec{n}, \quad T_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j$$

- ▶ $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ la normale à l'élément de surface ds
- ▶ σ tenseur de contraintes

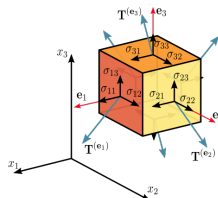
Tenseur de contraintes σ

- σ : tenseur (3×3) symétrique qui caractérise l'état de contrainte avec

$$\sigma(X) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Éléments diagonaux : contraintes normales

Éléments non diagonaux : contraintes de cisaillement



Tenseur de contraintes σ

Définition de ses composantes

- ▶ Définition de la contrainte = forces appliquées par unité de surface
- ▶ Soit S la surface élément matière
- ▶ On a donc pour la contrainte : $\sigma = F/S$
- ▶ Soit vecteur-force :

$$\vec{F}_j = \begin{pmatrix} F_{1j} \\ F_{2j} \\ F_{3j} \end{pmatrix}$$

- ▶ F_{ij} : composante selon $\vec{e}_i$ de la force s'exerçant sur face j
- ▶ 9 composantes du tenseur σ définies par : $\sigma_{ij} = F_{ij}/S$

Relation entre vecteur de traction / tenseur de contraintes

Pour un volume dv , on a comme relation : $\vec{T} ds = \vec{\text{div}} \sigma dv$ (cf. page 21, HDR F. Zara)

avec $\vec{\text{div}} \sigma =$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \right) \vec{e}_3$$

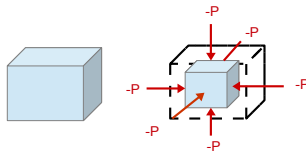
Tenseur de contraintes - exemple

Applique force de pression identique sur chacune des faces

Forces perpendiculaires aux faces (pas de cisaillement)

$$\sigma = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\text{div}} \sigma = \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial \sigma_0}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial \sigma_0}{\partial z} \vec{e}_3 = \nabla \sigma_0$$



Équation du mouvement de l'objet - Milieu continu

► PFD s'écrit au final :

$$\rho \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \rho \vec{f}_{ext} + \overrightarrow{div} \sigma$$

équation du mouvement de l'objet

Inconnues :

- masse volumique ρ (volume peut changer si pas incompressible)
- vecteur vitesse $\vec{v}(t)$
- tenseur de contraintes σ

Pour résoudre cette équation à chaque instant t ,
on va **relier vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ au tenseur de contraintes σ**

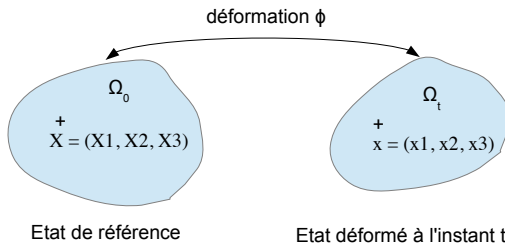
Cadre particulier des objets élastiques

- ▶ Objet est composé d'un **ensemble de points**
- ▶ On souhaite caractériser la **déformation** d'un objet élastique
- ▶ Objet élastique caractérisé par le fait qu'il retourne à sa forme initiale une fois la contrainte relâchée
- ▶ Nous allons observer la différence de **déplacement** entre un point de l'objet et un autre point

→ Lien entre les notions de déformation et de déplacement (exemple de l'éponge)

Cas des objets élastiques - Déformation Φ

- ▶ Considère 2 états de l'objet :
 - ▶ **état de référence** - Ω_0 (état non-déformé au temps t_0)
 - ▶ **état déformé** - Ω_t (état courant au temps t)
- ▶ La déformation Φ = relation entre les 2 configurations
 - ▶ Φ permet de passer de la position initiale $\mathbf{X}$ d'un point de l'objet à position courante $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t)$ de ce point
 - ▶ Position $\mathbf{X}$ = position initiale = constante dans le temps
 - ▶ Si objet élastique, déformation est réversible : $\mathbf{X} = \phi^{-1}(\mathbf{x}, t)$



Lien entre déformation et déplacement

- Déplacement d'un point de l'objet entre l'état de référence et l'état déformé :

$$\vec{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

- Relation directe entre déformation et déplacement :

$$\phi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} = \mathbf{X} + \vec{u}$$

Gradient des grandeurs physiques

- ▶ Gradient d'une quantité donne indication sur la variation de cette quantité dans toutes les directions de l'espace
- ▶ **Gradient du déplacement** : $\mathbb{U} = \nabla \vec{u} = \partial \vec{u} / \partial \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$
- ▶ **Gradient de la déformation** : $\mathbb{F} = \nabla \phi(\mathbf{X}, t) = \partial \phi(\mathbf{X}, t) / \partial \mathbf{X} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$
 - ▶ $F_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$ pour $i, j = 1, 2, 3$
 - ▶ $\mathbb{F}$ = jacobienne du mouvement défini par déformation ϕ
 - ▶ $\mathbb{F}$ mesure pour chaque direction de l'espace la variation du point $\mathbf{x}$ par rapport à la variation subie par le point $\mathbf{X}$

Gradient des grandeurs physiques

- Il est intéressant de relier $\mathbb{U}$ à $\mathbb{F}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} &= \frac{\partial \phi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \nabla \phi(\mathbf{X}, t) &= \nabla(\mathbf{x} + \vec{u}) \\ & &= \nabla \mathbf{x} + \nabla \vec{u} \\ & &= \mathbb{1} + \mathbb{U}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{U} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \mathbf{X}} &= \nabla \vec{u} = \nabla(\mathbf{x} - \mathbf{X}) &= \nabla(\phi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}) \\ & &= \nabla \phi(\mathbf{X}, t) - \nabla \mathbf{X} \\ & &= \mathbb{F} - \mathbb{1}\end{aligned}$$

- $\mathbb{F} = \mathbb{1} + \mathbb{U}$ ou $\mathbb{U} = \mathbb{F} - \mathbb{1}$
- $\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = F_{ij} = \delta_{ij} + u_{ij}$ ou $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = F_{ij} - \delta_{ij}$

Gradient des grandeurs physiques

- ▶ $\mathbb{F}$ basée sur la variation du vecteur défini entre 2 points
- ▶ Pas une représentation exacte de l'état de déformation
- ▶ Besoin de tenseurs plus complexes pour obtenir relation plus précise déformation/déplacement

Tenseur de déformation

Tenseur de déformation :

- Tenseur de déformation (matrice 3×3) décrit l'état de déformation local résultant de contraintes (efforts internes)
- Il permet ainsi de quantifier la déformation avec

$$\varepsilon(X) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Éléments diagonaux : étirement dans les 3 directions

Éléments non diagonaux : cisaillement

Tenseur déformation exprimé en fonction du gradient déplacement

Tenseur de déformation

- ▶ Tenseur de déformation doit être nul pour un mouvement de corps rigide (pas de variation entre 2 points de l'objet)
- ▶ Plusieurs tenseurs de déformation en fonction de la déformation à mettre en avant :
 - ▶ Tenseur de déformation de **Cauchy-Green droit**
 - ▶ Tenseur de déformation de **Cauchy-Green gauche**,
 - ▶ Tenseur de déformation de **Green-Lagrange (ou Green-Saint Venant)**
 - ▶ etc.

Tenseur de déformation de Cauchy-Green droit

- Le **tenseur de déformation de Cauchy-Green droit** se calcule à partir du carré du vecteur $\vec{dx}$ avec ¹ :

$$\begin{aligned} (\vec{dx})^2 &= \vec{dx} \cdot \vec{dx} = (\mathbb{F} \cdot \vec{dX}) \cdot (\mathbb{F} \cdot \vec{dX}) \\ &= (\mathbb{F}^T \mathbb{F} \cdot \vec{dX}) \cdot \vec{dX} \\ &= \vec{dX} \cdot (\mathbb{F}^T \mathbb{F} \cdot \vec{dX}) \end{aligned}$$

- Le tenseur de Cauchy-Green droit est défini par

$$\mathcal{E}^{cd} = \mathbb{F}^T \mathbb{F}$$

¹ $\vec{v} \cdot \mathbb{A} \vec{u} = \mathbb{A}^T \vec{v} \cdot \vec{u}$ avec $\vec{u}, \vec{v}$ des vecteurs et $\mathbb{A}$ tenseur d'ordre 2, avec $\vec{v} = \mathbb{F} \cdot \vec{dX}$, $\mathbb{A} = \mathbb{F}$ et $\vec{u} = \vec{dX}$

Tenseur de déformation de Green-Lagrange

- Le **tenseur de déformation de Green-Lagrange** est calculé à partir de la différence entre les carrés de la configuration initiale et de la configuration déformée avec :

$$\begin{aligned}
 (\vec{dx})^2 - (\vec{dX})^2 &= \vec{dX} \cdot (\varepsilon^{cd} \cdot \vec{dX}) - (\vec{dX} \cdot \vec{dX}) \\
 &= \vec{dX} \cdot (\varepsilon^{cd} \vec{dX} - \vec{dX}) \\
 &= \vec{dX} \cdot (\varepsilon^{cd} - \mathbb{1}) \cdot \vec{dX} \\
 &= 2 \vec{dX} \cdot \left(\frac{1}{2} (\varepsilon^{cd} - \mathbb{1}) \cdot \vec{dX} \right)
 \end{aligned}$$

- Le tenseur de Green-Lagrange est défini par

$$\varepsilon^g = \frac{1}{2} (\varepsilon^{cd} - \mathbb{1}) = \frac{1}{2} (\mathbb{F}^T \mathbb{F} - \mathbb{1})$$

Tenseur de déformation de Green-Lagrange

- Pour obtenir la formulation du tenseur de Green-Lagrange en fonction du déplacement, nous utilisons la relation $\mathbb{F} = \mathbb{1} + \mathbb{U}$:

$$\begin{aligned}\varepsilon^g &= \frac{1}{2}(\mathbb{F}^T \mathbb{F} - \mathbb{1}) \\ &= \frac{1}{2}((\mathbb{1} + \mathbb{U})^T \cdot (\mathbb{1} + \mathbb{U}) - \mathbb{1}) \\ &= \frac{1}{2}((\mathbb{1} + \mathbb{U})^T + (\mathbb{1} + \mathbb{U})^T \cdot \mathbb{U} - \mathbb{1}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{U}^T + \mathbb{U} + \mathbb{U}^T \cdot \mathbb{U})\end{aligned}$$

Tenseur de déformation de Green-Lagrange

► Nous avons donc :

$$\varepsilon^g(X) = \frac{1}{2} (\nabla U^T(X) + \nabla U(X) + \nabla U^T(X) \nabla U(X))$$

avec

$$\nabla U(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_x(X)}{\partial x} & \frac{\partial U_x(X)}{\partial y} & \frac{\partial U_x(X)}{\partial z} \\ \frac{\partial U_y(X)}{\partial x} & \frac{\partial U_y(X)}{\partial y} & \frac{\partial U_y(X)}{\partial z} \\ \frac{\partial U_z(X)}{\partial x} & \frac{\partial U_z(X)}{\partial y} & \frac{\partial U_z(X)}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Partie linéaire - Cas élasticité linéaire avec loi de Hooke

Partie non-linéaire - Cas élasticité non-linéaire

Tenseurs de déformation

Remarque

- ▶ Prise en compte que des aspects géométriques de la déformation
- ▶ Pas de lien avec la mécanique dans ces définitions

Retour sur l'équation du mouvement à résoudre

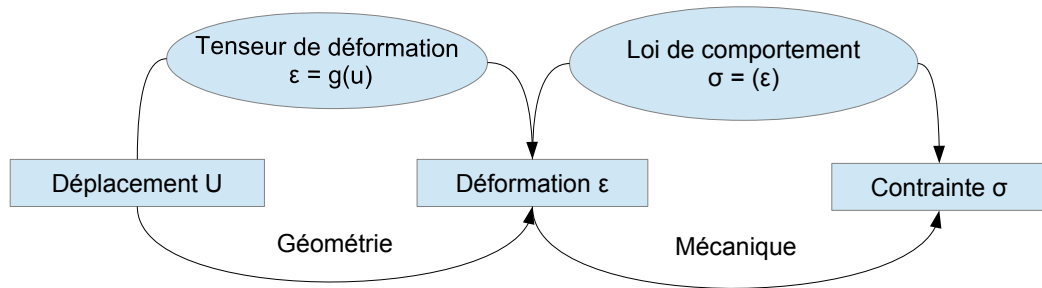
Rappel - Besoin de **relier vecteur vitesse** $\vec{v}(t)$ **au tenseur de contraintes** σ

Suffit d'exprimer $\vec{v}(t)$ et σ en fonction du déplacement $\vec{u}(t)$

- ▶ Pour la vitesse : $\vec{v}(t) = d\vec{u}(t)/dt$
- ▶ Pour σ : **loi de comportement** relie le tenseur de contraintes σ à la déformation ε
 - ▶ Puis **tenseur de déformation** ε relie déformation à $\vec{u}(t)$
 - ▶ Donc σ relié à $\vec{u}(t)$ - On peut alors résoudre l'équation !

Retour sur l'équation du mouvement à résoudre

Lien établi entre contrainte σ et déplacement $\vec{u}(t)$

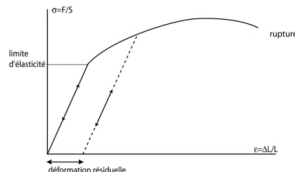


Pour définir équation du mouvement d'un objet :

- choix tenseur de déformation
- choix loi de comportement

Loi de comportement

- Relation entre la contrainte et la déformation : $[\sigma] = [C][\varepsilon]$



- Il faut trouver la loi correspondant au matériau
- Tenseur $[C]$ = donnée du problème (connu) : obtenue par expérimentations
- Prise en compte des caractéristiques mécaniques de l'objet :
module de Young E , coefficient de Poisson ν , etc.

Loi de comportement

Exemple : cas élasticité linéaire

- ▶ Partie linéaire de la courbe précédente
- ▶ Concerne les petites déformations ($< 10\%$ taille objet)
- ▶ Déformation élastique est réversible : objet retourne à son état initial quand la contrainte est supprimée

Loi de comportement - Élasticité linéaire

Loi de comportement pour l'élasticité linéaire (**matériau isotrope**) = Loi de Hooke

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$

avec λ et μ coefficients de Lamé (dépendant du matériau) : $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr}(\varepsilon) \mathbb{1} \right), \sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \text{ pour } i, j = 1, 2, 3.$$

Loi de comportement - Élasticité linéaire

Formulation inversée de la loi de Hooke

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}.$$

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\sigma) \mathbb{1}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \text{ pour } i, j = 1, 2, 3.$$

Loi de comportement - Élasticité linéaire

Choix du tenseur de déformation en adéquation

- Utilisation de la partie linéaire du **tenseur de déformation** de Green-Saint Venant :

$$\varepsilon(X) = \frac{1}{2} (\nabla U^T(X) + \nabla U(X))$$

Loi de comportement - Élasticité non-linéaire

Cas de l'élasticité non-linéaire :

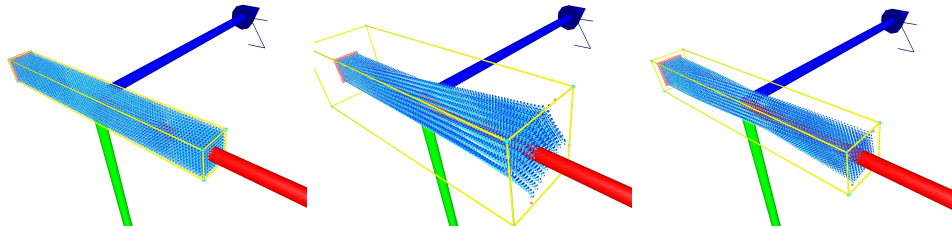
- ▶ Permet de simuler des déformations plus grandes
- ▶ Plusieurs lois de comportement possibles pour le cas non-linéaire (matériaux hyper-élastiques) : Mooney-Rivlin, Neo-Hooke, etc.
- Expérimentations pour savoir quelle loi correspond au matériau
- ▶ Choix possible pour le tenseur de déformation : celui de Green-Saint Venant

$$\frac{1}{2} (\nabla U^T(X) + \nabla U(X) + \nabla U^T(X) \nabla U(X))$$

Loi de comportement - Linéaire vs. non-linéaire

Exemple de comportement :

- Hooke (linéaire) vs. Saint Venant-Kirchhoff (non-linéaire)



- Élargissement dans cas élasticité linéaire car pas invariant par rotation
- Rotation interprété comme augmentation énergie élastique créant distorsion

Simulation en Mécanique des Milieux Continus

Retour sur l'équation du mouvement : $\rho \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \rho \vec{f}_{ext} + \text{div } \sigma$

Exemple - Matériau élastique isotrope

- ▶ **Loi de Hooke** : $\sigma = \lambda \text{Tr}(\varepsilon) \mathbb{1} + 2 \mu \varepsilon$
- ▶ **Tenseur de Green-Lagrange linéaire** : $\varepsilon = \frac{1}{2} \nabla U^T(X) + \nabla U(X)$
- ▶ Obtient la formulation de $\text{div } \sigma = (\lambda + 2 \mu) \nabla (\text{div } \vec{u}) - \mu \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{u}$

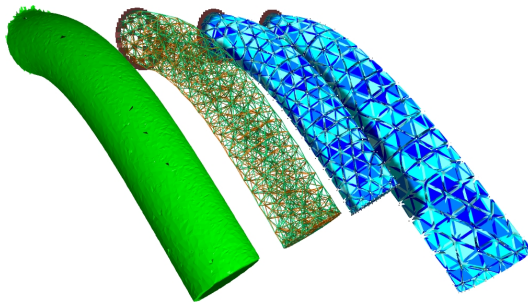
Au final : Equation de Navier de l'élasticité linéaire isotrope - A résoudre !

$$\rho \frac{d^2 \vec{u}(t)}{dt^2} = \rho \vec{f}_{ext}(t) + (\lambda + 2 \mu) \nabla (\text{div } \vec{u}(t)) - \mu \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{u}(t)$$

Simulation en Mécanique des Milieux Continus

Comment résoudre l'équation continue ?

- ▶ Discrétisation de l'objet en éléments
 - ▶ Maille du maillage = nœuds + fonctions d'interpolation
 - ▶ Déplacement formulé en tout point intérieur à un élément en fonction valeurs aux nœuds
- ▶ Résolution équation du mouvement pour obtenir déplacement $\vec{u}(t)$



Résolution par la Méthode des Éléments Finis (MEF)

- ▶ Résolution par la MEF pour obtenir déplacement $\vec{u}(t)$:
 - ▶ Discrétisation du domaine en éléments
 - ▶ Définition de fonctions de formes
 - ▶ Loi de comportement : lien entre contrainte et déformation
 - ▶ Tenseur de déformation : lien entre déformation et déplacement
 - Déduit le lien entre la contrainte et le déplacement
 - ▶ Équation du mouvement : Force = ...
 - Formulation matricielle du PFD : $M\ddot{U} + KU = F$
- Assemblage de la matrice des raideurs K
- Résolution pour obtenir U

Comment caractériser les objets déformables ?

Caractéristique des objets déformables = élasticité

- ▶ Observation du rapport : contrainte (*stress*) / déformation (*strain*)

Contrainte $\sigma = F/A$

- ▶ Contrainte importante quand intensité de la force importante ou surface petite
- ▶ Exemple :
 - ▶ Corps rigide de masse m soumis à la force de gravité $\vec{F} = m\vec{g}$
 - ▶ Corps posé sur un cylindre de rayon r
 - ▶ Contrainte appliquée sur le cylindre : $\sigma = F/A = \frac{mg}{\pi r^2}$

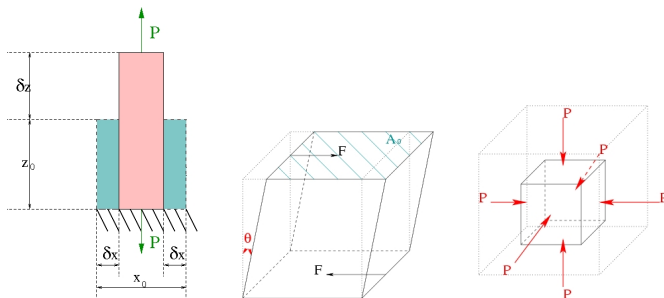
Déformation

Observation des modifications subies par l'objet sous l'effet de la contrainte

Comment caractériser les objets déformables ?

Plusieurs **tests de déformations** pour mettre en avant **paramètres d'élasticité**

- ▶ **Etirement** $\Rightarrow$ module de Young, coefficient de Poisson
- ▶ **Cisaillement** $\Rightarrow$ module de cisaillement (*shear*)
- ▶ **Compression** $\Rightarrow$ module de compressibilité (*Bulk*)



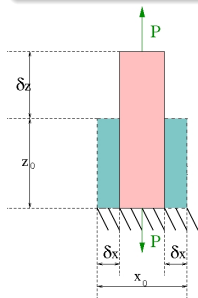
1 - Test de traction / étirement - Module de Young

Etirement : applique pression F sur un côté de surface A , de longueur L

⇒ Longueur change de ΔL

⇒ Déformation ou allongement relatif : $\frac{\Delta L}{L}$

⇒ Contrainte de traction : $\sigma = \frac{F}{A}$



Module de Young

► Contrainte de traction / déformation

$$\Rightarrow E = \frac{F/A}{\Delta L/L} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

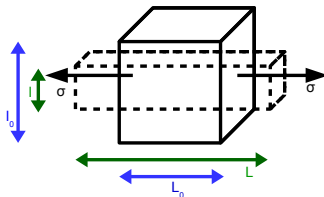
► Loi de Hooke - loi de comportement linéaire :
contrainte (σ) = Young (E) * déformation (ε)

1 - Test de traction / étirement - Module de Young

De manière plus formelle : soit sollicitation selon axe x avec $\sigma_x = F/ds$

Tenseur de contrainte

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



1 - Test de traction / étirement - Module de Young

Considère matériau élastique isotrope qui suit la loi de Hooke

Tenseur de déformation (selon loi inversée de Hooke)

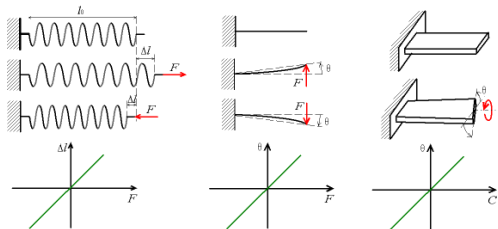
$$\begin{cases} \varepsilon_{11} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_x = \frac{\sigma_x}{E}, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -\frac{\nu}{E} \sigma_x, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{33} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -\frac{\nu}{E} \sigma_x. \end{cases}$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_x \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} \sigma_x & & \\ -\nu \sigma_x & & \\ & -\nu \sigma_x & \\ & & 0 \\ & & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Déformation selon l'axe x : $\varepsilon_{11} = \sigma_x / E \Rightarrow \sigma_x = E * \varepsilon_{11} \Rightarrow E = \sigma_x / \varepsilon_{11}$

Module de Young (ou module d'élasticité)

► Cas simple de déformation élastique : les ressorts



Images issues de Wikipedia

- Pour loi de déformation linéaire, le coefficient de proportionnalité est appelé raideur (k) du ressort
 - $F = k_1 \Delta L$ pour une traction-compression
 - $F = k_2 \theta$ pour une flexion
 - $C = k_3 \theta$ pour une torsion

Module de Young (ou module d'élasticité)

Module de Young très élevé : matériau rigide

- ▶ Matériaux très rigides : acier, iridium, diamant
- ▶ Matériaux moins rigides : aluminium, plomb
- ▶ Matériaux peu rigides : matières plastiques et organiques

Module de Young (ou module d'élasticité)

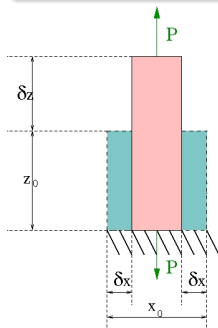
Modules de Young approximatifs de divers solides

Matériel	Module de Young (e) dedans GPa	Module de Young (e) en livrein* (livre par pouce carré)
Le caoutchouc (petite contrainte)	0.01-0.1	1.500-15.000
Polyéthylène de faible densité	0.2	30.000
Polypropylène	1.5-2	217.000-290.000
Téréphtalate de polyéthylène	2-2.5	290.000-360.000
Polystyrène	3-3.5	435.000-505.000
Nylon	2-4	290.000-580.000
Chêne bois (le long du grain)	11	1.600.000
De haute résistance concret (une fois comprimé)	30	4.350.000
Magnésium métal	45	6.500.000
Aluminium alliage	69	10.000.000
Verre (tous les types)	72	10.400.000
Laiton et bronze	103-124	17.000.000
Titane (Ti)	105-120	15.000.000-17.500.000
Plastique renforcé de fibres de carbone (continu, le long du grain)	150	21.800.000
Fer travaillé et acier	190-210	30.000.000
Tungstène (w)	400-410	58.000.000-59.500.000
Carbure de silicium (SiC)	450	65.000.000
Carbure de tungstène (CARTE DE TRAVAIL)	450-650	65.000.000-94.000.000
Nanotube simple de carbone [1]	approximativement. 1.000	approximativement. 145.000.000
Diamant	1.050-1.200	150.000.000-175.000.000

1 - Test de traction / étirement - Coefficient de Poisson

Elargissement

- ▶ Quand exerce un étirement ou une compression, la largeur de la pièce varie également, à l'inverse de l'allongement



Coefficient de Poisson

$$\nu = -\frac{\text{Elargissement}}{\text{Déformation}} = -\frac{\text{Elargissement}}{(\Delta L/L)}$$

Coefficient de Poisson

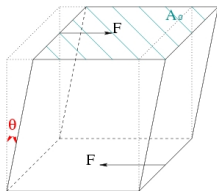
Valeur du coeff. de Poisson comprise entre -1 et 0.5

- ▶ **Matériau isotrope : valeur de 1/4**
Même déformation dans toutes les directions
- ▶ **Matériau incompressible : valeur de 1/2**
Exemple : Un ballon étant compressé
- ▶ **Aucune conservation du volume : valeur de 0**
Exemple : boîte de conserve creuse en train d'être écrasée
- ▶ **Expansion du matériau lorsqu'il est soumis à une contrainte : valeur de -1**
Exemple : maillet de dessin animé frappant le sol et s'agrandissant au fur et à mesure qu'il frappe

2 - Test de cisaillement - Module de Coulomb

Cisaillement : variation de l'angle, qui n'est plus droit

- ▶ Cela correspond à des forces s'exerçant parallèlement à la face
- ▶ Contrainte = scission = F / A
- ▶ Déformation = écart à l'angle droit = cisaillement



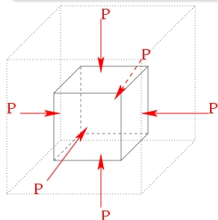
Module de cisaillement ou de Coulomb

- ▶ $G = \frac{\text{contrainte}}{\text{déformation}} = \frac{F/A}{\theta}$
- ▶ Si milieu isotrope (même comportement dans toutes les directions), $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

3 - Test de compression - Bulk modulus

Compression

- ▶ Exerce une force
 - ▶ isotrope : même valeur dans toutes les directions
 - ▶ perpendiculaire en tout point de la surface
- ▶ Pression $P = F/A \Rightarrow$ variation ΔP
- ▶ Objet de volume $V \Rightarrow$ variation ΔV



Module de compressibilité ou d'élasticité

- ▶ Contrainte volumique / déformation volumique

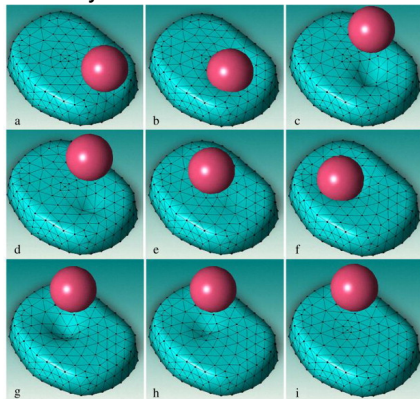
$$\Rightarrow B = \frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

Au final - Comment simuler comportement objet déformable ?

- ▶ Tests pour obtenir loi de comportement et paramètres du matériau
- ▶ Choix du tenseur de déformation en adéquation avec la loi de comportement
- ▶ Établissement de l'équation du mouvement
- ▶ Résolution par la MEF

Alternative possible pour modéliser objets déformables

Système masse-ressorts



Système masses-ressorts

Définition

- ▶ Objet déformable modélisé par un ensemble de masses connectées par des ressorts
- ▶ Les objets ainsi modélisés peuvent être :
 - ▶ des courbes (cheveux, cordes, etc.) $\Rightarrow$ 1 dimension
 - ▶ des surfaces (textiles, surface de l'eau, etc.) $\Rightarrow$ 2 dimensions
 - ▶ des volumes (objets volumiques visqueux) $\Rightarrow$ 3 dimensions

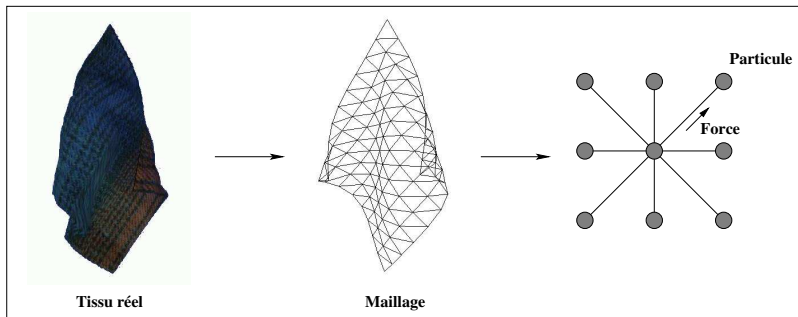
Complexité du système dépend

- ▶ du nombre de masses
- ▶ de leurs connections

Exemple : application à une simulation de textiles

Discrétisation du textile en un maillage polygonal

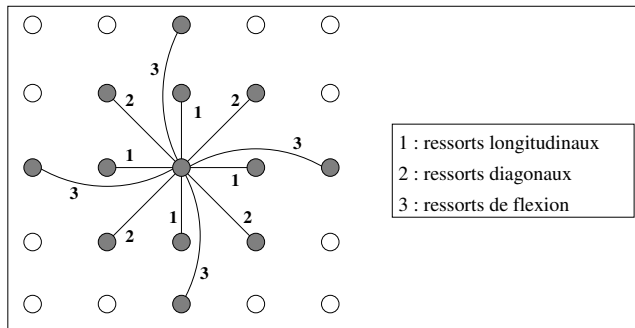
- ▶ Sommets correspondent aux particules/masses
- ▶ Topologie définit les interactions



[Breen, House, Getto 1994]

Exemple : application à une simulation de textiles

Positionnement des ressorts définit les interactions entre particules



[Provot 1995]

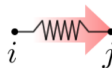
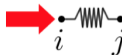
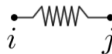
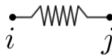
Simulation d'un système masses-ressorts

Boucle d'animation basée sur la dynamique Newtonienne

- ▶ **Calcul des forces** appliquées sur les particules :
 - ▶ forces exercées par les ressorts
 - ▶ forces externes (vent, gravité, interaction utilisateur, etc.)
- ▶ **Calcul des accélérations** :
 - ▶ principe fondamental de la dynamique
- ▶ **Intégration** pour obtenir les nouvelles vitesses et positions

Calcul de la force d'un ressort

- Soit réseau de deux masses i et j et ressort les connectant
- Quand force appliquée à une masse, ressort est comprimé et compensera en appliquant force opposée à l'autre masse pour décompresser



Calcul de la force d'un ressort - force élastique

- **Force appliquée à la masse i par le ressort reliant les masses i et j :**

$$\vec{f}_{i,j}^e(t) = k_{ij} (\|x_i(t) - x_j(t)\| - l_{ij}) \vec{u}_{i,j}, \text{ avec}$$

- $\|x_i(t) - x_j(t)\|$: distance entre les 2 masses
- l_{ij} : longueur au repos du ressort
- k_{ij} : raideur du ressort
- $\vec{u}_{i,j}$: vecteur normalisé allant de i vers j avec $\vec{u}_{i,j} = \frac{x_j(t) - x_i(t)}{\|x_j(t) - x_i(t)\|}$

- **Force appliquée à la masse j à partir du même ressort :**

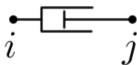
$$\vec{f}_{j,i}^e(t) = -\vec{f}_{i,j}^e(t)$$

Calcul de la force d'un ressort - force d'amortissement

- Cas ressort amorti : ajout amortisseur
- Applique une force inverse à la vitesse qui est appliquée pour le compresser
- **Force appliquée à la masse i par l'amortisseur reliant les masses i et j :**

$$\vec{f}_{i,j}^v(t) = (-v_{ij}(\dot{x}_j(t) - \dot{x}_i(t)) \cdot \vec{u}_{i,j}) \vec{u}_{i,j}$$

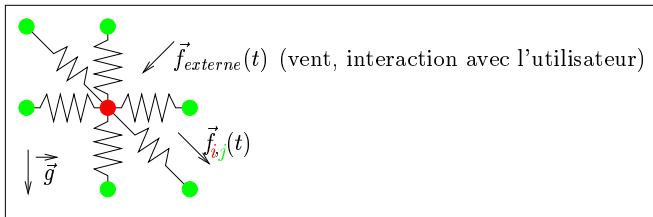
avec v_{ij} la constante d'amortissement du ressort



Système masses ressorts - calcul des forces

► Force exercée sur chaque particule i :

► $\vec{f}_i(t) = \sum_{j|j \text{ voisin de } i} [\vec{f}_{i,j}^e(t) + \vec{f}_{i,j}^v(t)] + \text{gravité} + \text{interactions}$



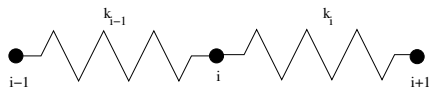
$$\begin{cases} \vec{f}_{i,j}^e(t) &= k_{ij} (\|x_i(t) - x_j(t)\| - l_{ij}) \vec{u}_{i,j} & \text{élasticité} \\ \vec{f}_{i,j}^v(t) &= (-v_{ij} (\dot{x}_j(t) - \dot{x}_i(t)) \cdot \vec{u}_{i,j}) \vec{u}_{i,j} & \text{amortissement} \end{cases}$$

Système masses ressorts - calcul des accélérations

Loi fondamentale de la dynamique appliquée à chaque particule i :

$$\ddot{x}_i(t) = m_i^{-1} f_i(x(t), \dot{x}(t))$$

- ▶ $\ddot{x}_i(t)$: accélération de la particule i au temps t
- ▶ m_i : masse de la particule i
- ▶ f_i : forces exercées sur la particule i
- ▶ $x(t)$: vecteur des positions des particules au temps t
- ▶ $\dot{x}(t)$: vecteur des vitesses des particules au temps t



Au final - Système différentiel lié au système masses-ressorts

- Système différentiel associé aux p particules

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) &= M^{-1} f(t, x(t), \dot{x}(t)) \\ \dot{x}(t_0) &= v_0 \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

→ f dépend de la définition des interactions

- Peut être transformé en système du premier ordre

$$\begin{pmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{-1} f(t, x(t), v(t)) \\ v(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v(t_0) \\ x(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

- A résoudre pour obtenir les vitesses et les positions des masses

Système masses-ressorts

Problématique en recherche

- ▶ Positionnement des ressorts
- ▶ Définition des raideurs en fonction de E et ν
- ▶ Méthode d'intégration implicite : calculs de df/dx , df/dv
- ▶ Raffinement du maillage : nouvelles raideurs et masses
- ▶ Structure de données adéquate
- ▶ Parallélisation des algorithmes

Merci de votre attention