

Algorithme d'Euclide et géométrie digitale

Tristan Roussillon

Université de Lyon, INSA Lyon, LIRIS, France

03 février 2020

Algorithme original (vers 300 avant JC)

Livre VII (Proposition 1-3) des Éléments d'Euclide

Version additive

Input : deux entiers $a, b \in \mathbb{N}$

```
1 while  $a \neq b$  do  
2   if  $a > b$  then  
3      $a \leftarrow a - b$  ;  
4   else  
5      $b \leftarrow b - a$  ;  
6 return  $a$ 
```

Retourne le plus grand diviseur commun (gcd) de deux nombres sans calculer leur factorisation en nombres premiers.

Algorithme actuel

Donald Knuth, The Art of Computer Programming

Version multiplicative en $O(\log(\max(a, b)))$

Input : deux entiers $a, b \in \mathbb{N}$

```
1 while  $b \neq 0$  do  
2    $t \leftarrow b$  ;  
3    $b \leftarrow a \bmod b$  ;  
4    $a \leftarrow t$  ;  
5 return  $a$ 
```

Exemple pour 8 et 3, $\gcd(8, 3) = 1$

8		3	3		2	2		1
2		2	1		1	0		2

Développement en fraction continue

nombre rationnel $\Leftrightarrow$ développement en fraction continue limité :

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_n + 0}}} := [q_1, q_2, \dots, q_n]$$

L'algorithme d'Euclide donne les quotients $[q_1, q_2, \dots, q_n]$.

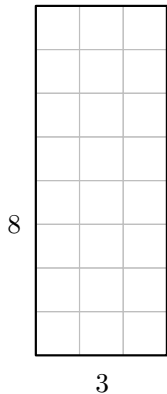
Exemple pour $8/3 = [2, 1, 2]$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 3 \\ 2 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array}$$

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2}{1}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + 0}}$$

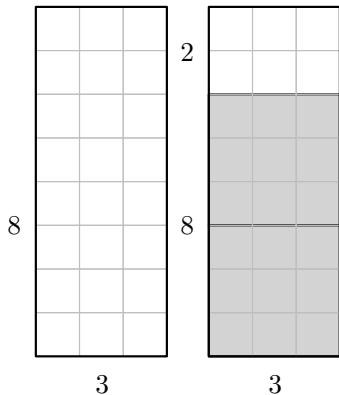
Interprétation classique par rectangles

a et b sont les longueur et largeur d'un rectangle, leur gcd la taille du plus grand carré permettant de carreler entièrement le rectangle



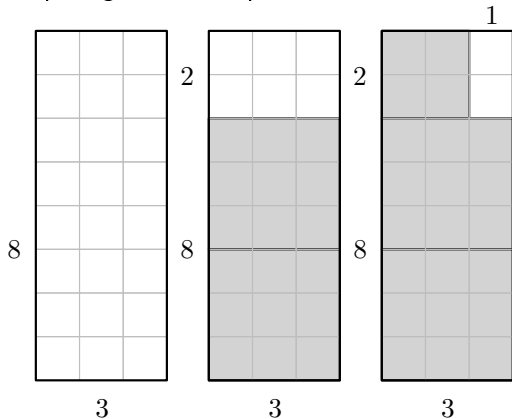
Interprétation classique par rectangles

a et b sont les longueur et largeur d'un rectangle, leur gcd la taille du plus grand carré permettant de carreler entièrement le rectangle



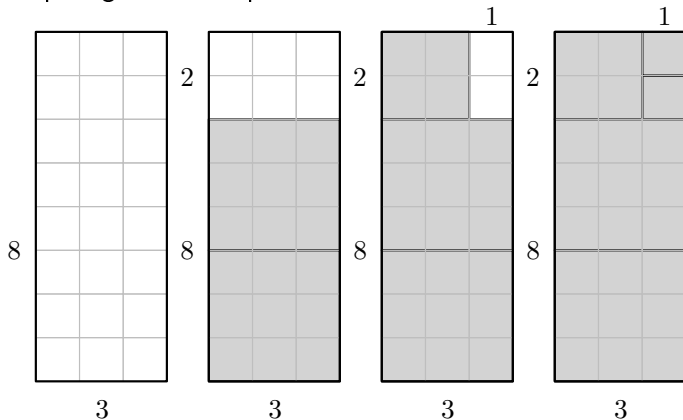
Interprétation classique par rectangles

a et b sont les longueur et largeur d'un rectangle, leur gcd la taille du plus grand carré permettant de carreler entièrement le rectangle



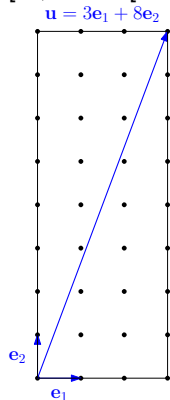
Interprétation classique par rectangles

a et b sont les longueur et largeur d'un rectangle, leur gcd la taille du plus grand carré permettant de carreler entièrement le rectangle



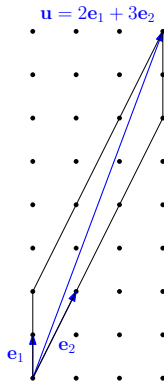
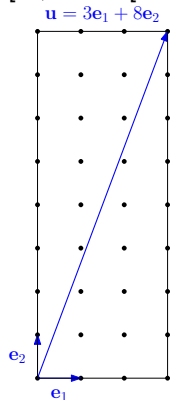
Interprétation des pentes dans une grille

On cherche la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ pour laquelle $\mathbf{u}(a, b)$ à une pente entière, le gcd est le nombre de points entiers sur le segment $[O, O + \mathbf{u}]$.



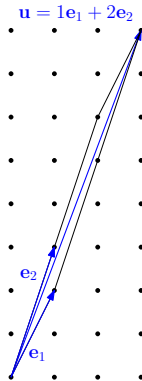
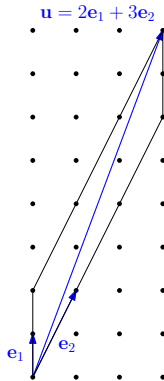
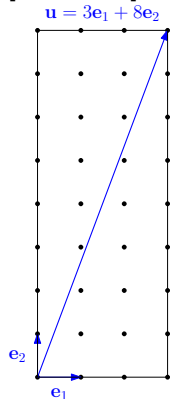
Interprétation des pentes dans une grille

On cherche la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ pour laquelle $\mathbf{u}(a, b)$ à une pente entière, le gcd est le nombre de points entiers sur le segment $[O, O + \mathbf{u}]$.



Interprétation des pentes dans une grille

On cherche la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ pour laquelle $\mathbf{u}(a, b)$ à une pente entière, le gcd est le nombre de points entiers sur le segment $[O, O + \mathbf{u}]$.



Outline

Algorithme d'Euclide

Droite digitale

Applications

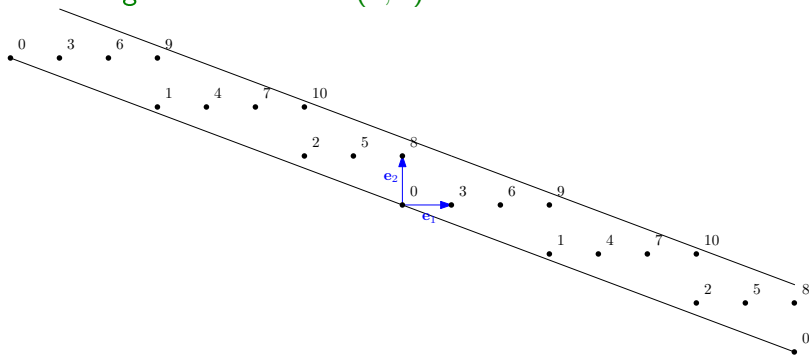
Extension aux plans digitaux

Droite digitale

$$D(\mathbf{N}, \mu) = \{x \in \mathbb{Z}^2 \mid \mu \leq x \cdot \mathbf{N} < \mu + \omega\}.$$

- ▶ vecteur normal $\mathbf{N}(a, b)$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, $\gcd(a, b) = 1$, on suppose que $0 < a \leq b$ et on note l'épaisseur $\omega := \|\mathbf{N}\|_1$.
- ▶ décalage à l'origine $\mu \in \mathbb{Z}$, on suppose $\mu = 0$.

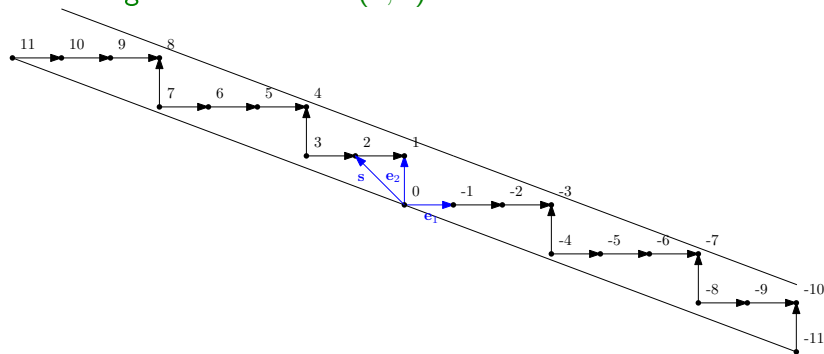
Droite digitale de normale $(3, 8)$ et hauteurs



Ordre des points dans une droite digitale

On peut ordonner les points $x \in D(\mathbf{N})$ selon $x \cdot \mathbf{s}$, où $\mathbf{s} := \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$.
La différence de deux points successifs est $-\mathbf{e}_1$ ou $\mathbf{e}_2$, qu'on peut coder par 1 et 2 respectivement.

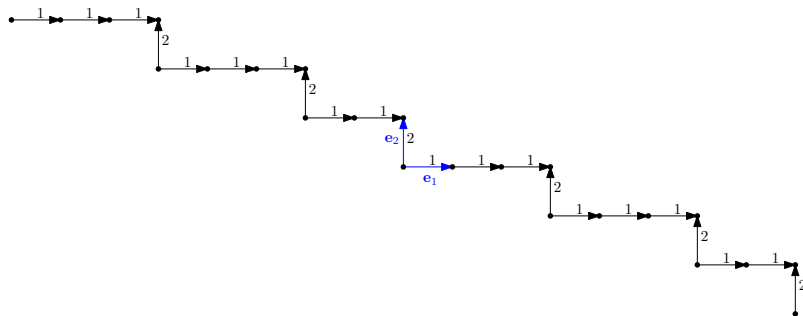
Droite digitale de normale $(3, 8)$ et indices



Ordre des points dans une droite digitale

On peut ordonner les points $x \in D(\mathbf{N})$ selon $x \cdot \mathbf{s}$, où $\mathbf{s} := \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$.
La différence de deux points successifs est $-\mathbf{e}_1$ ou $\mathbf{e}_2$, qu'on peut coder par 1 et 2 respectivement.

Droite digitale de normale (3,8) et codes



Périodicité

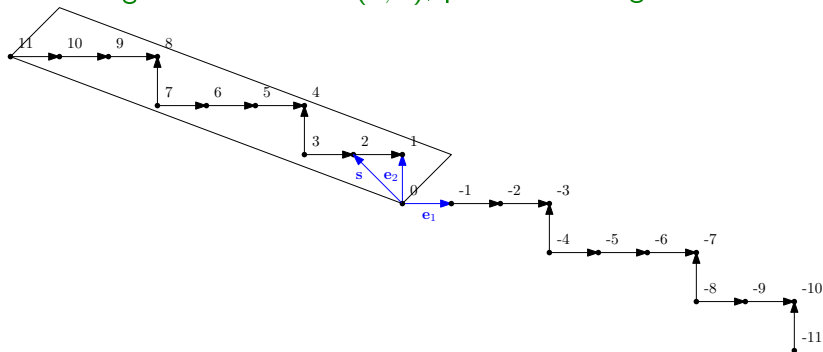
Translation tangentielle

$D(\mathbf{N}) = D(\mathbf{N}) + k\mathbf{T}$, $k \in \mathbb{Z}$, où $\mathbf{T}(-b, a)$ est le vecteur tangent, car $\forall k \in \mathbb{Z}$, $(x + k\mathbf{T}) \cdot \mathbf{N} = x \cdot \mathbf{N} + k\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = x \cdot \mathbf{N}$.

Longueur d'une période

$\mathbf{T} \cdot \mathbf{s} = a + b = \|\mathbf{N}\|_1 = \omega$.

Droite digitale de normale $(3, 8)$, période de longueur 11



Périodicité

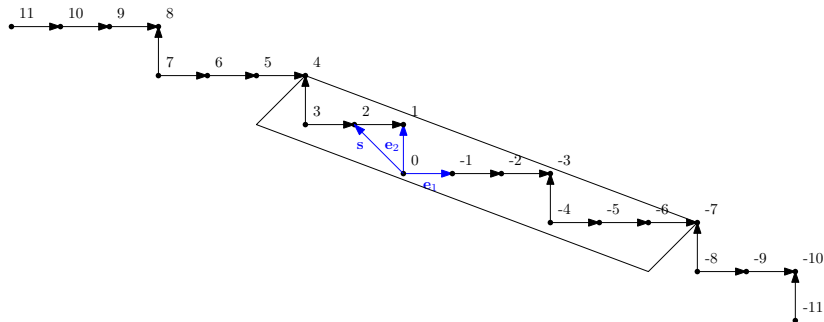
Translation tangentielle

$D(\mathbf{N}) = D(\mathbf{N}) + k\mathbf{T}$, $k \in \mathbb{Z}$, où $\mathbf{T}(-b, a)$ est le vecteur tangent, car $\forall k \in \mathbb{Z}$, $(x + k\mathbf{T}) \cdot \mathbf{N} = x \cdot \mathbf{N} + k\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = x \cdot \mathbf{N}$.

Longueur d'une période

$\mathbf{T} \cdot \mathbf{s} = a + b = \|\mathbf{N}\|_1 = \omega$.

Droite digitale de normale $(3, 8)$, période de longueur 11



Génération d'une période

Trois méthodes

- ▶ par concaténation (bottom-up),
- ▶ par union/translation,
- ▶ par substitution (top-down).

Elles sont basées sur les quotients du développement en fraction continue de la pente de $\mathbf{N}$.

Par exemple, la pente de $\mathbf{N}(3, 8)$ est $\frac{8}{3} = [2, 1, 2]$

k	0	1	2	3	4
$q^{(k)}$		2	1	2	

Génération par concaténation

On fabrique la séquence de mots suivante :

$$w^{(0)} = 2, w^{(1)} = 1,$$

$$\forall k \geq 2 \quad \begin{cases} w^{(k)} = w^{(k-2)} w^{(k-1)q^{(k-1)}} & \text{si } k \text{ est pair} \\ w^{(k)} = w^{(k-1)q^{(k-1)}} w^{(k-2)} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

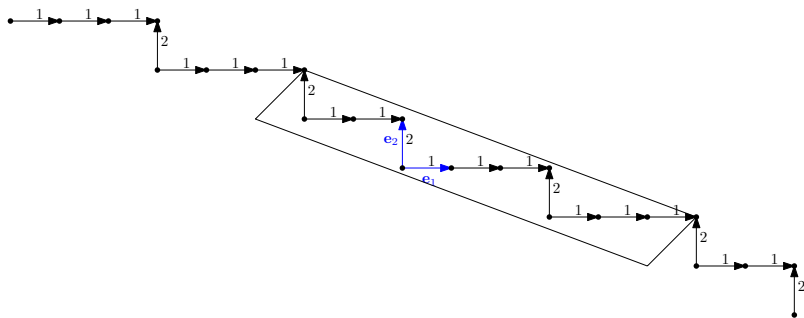
Exemple pour $N(3, 8)$

k	0	1	2	3	4
$q^{(k)}$		2	1	2	
$w^{(k)}$	2	1	211	2111	21121112111

Génération par concaténation

Exemple pour $N(3, 8)$

k	0	1	2	3	4
$q^{(k)}$		2	1	2	
$w^{(k)}$	2	1	211	2111	21121112111



Position d'une extrémité (jambe)

On fabrique la séquence de vecteurs suivante :

$$t^{(0)} = \mathbf{e}_2, \quad t^{(1)} = -\mathbf{e}_1 \text{ et}$$

$$\forall k \geq 1, \quad t^{(k)} = t^{(k-2)} + q^{(k-1)} t^{(k-1)}.$$

Pour $k \geq 1$,

- ▶ si k est impair, $l^{(k)} := (1, 1) - t^{k-1}$ est à droite,
- ▶ si k est pair, $l^{(k)} := (1, 1) + t^{k-1}$ est à gauche.

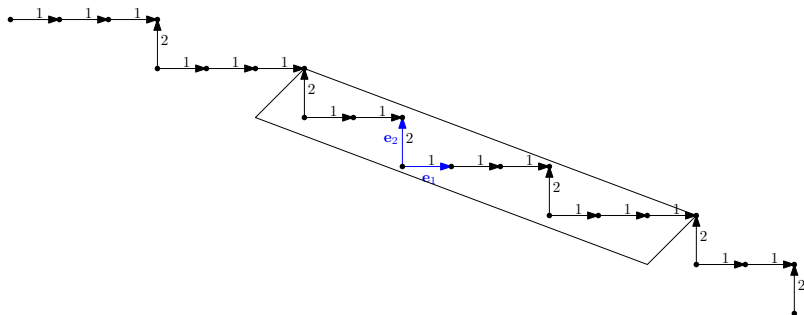
Exemple pour $N(3, 8)$

k	0	1	2	3	4
$q^{(k)}$		2	1	2	
$w^{(k)}$	2	1	211	2111	21121112111
$t^{(k)}$	(0,1)	(-1,0)	(-2,1)	(-3,1)	(-8,3)
$l^{(k)}$		(1,0)	(0,1)	(3,0)	(-2,2)

Position d'une extrémité (jambe)

Exemple pour $N(3,8)$

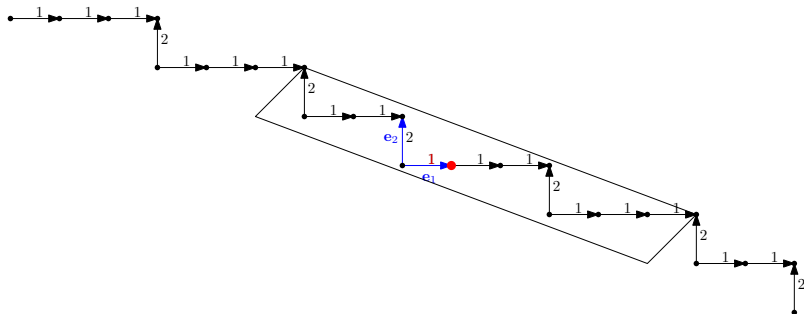
k	0	1	2	3	4
$q^{(k)}$		2	1	2	
$w^{(k)}$	2	1	211	2111	21121112111
$t^{(k)}$	(0,1)	(-1,0)	(-2,1)	(-3,1)	(-8,3)
$l^{(k)}$		(1,0)	(0,1)	(3,0)	(-2,2)



Position d'une extrémité (jambe)

Exemple pour $N(3,8)$

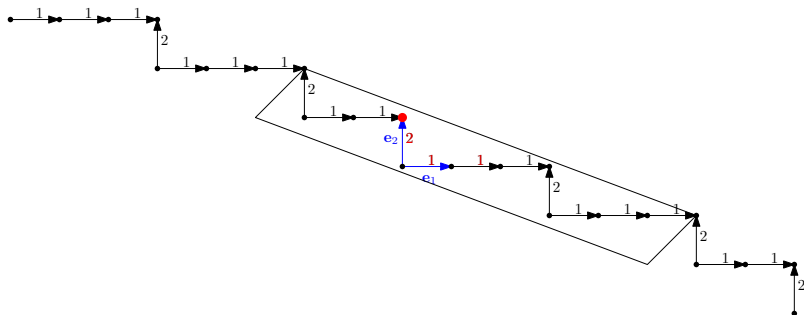
k	0	1	2	3	4
$q^{(k)}$		2	1	2	
$w^{(k)}$	2	1	211	2111	21121112111
$t^{(k)}$	(0,1)	(-1,0)	(-2,1)	(-3,1)	(-8,3)
$l^{(k)}$		(1,0)	(0,1)	(3,0)	(-2,2)



Position d'une extrémité (jambe)

Exemple pour $N(3,8)$

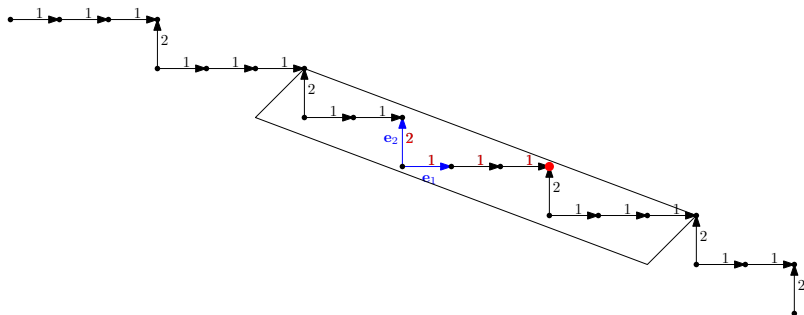
k	0	1	2	3	4
$q^{(k)}$		2	1	2	
$w^{(k)}$	2	1	211	2111	21121112111
$t^{(k)}$	(0,1)	(-1,0)	(-2,1)	(-3,1)	(-8,3)
$l^{(k)}$		(1,0)	(0,1)	(3,0)	(-2,2)



Position d'une extrémité (jambe)

Exemple pour $N(3,8)$

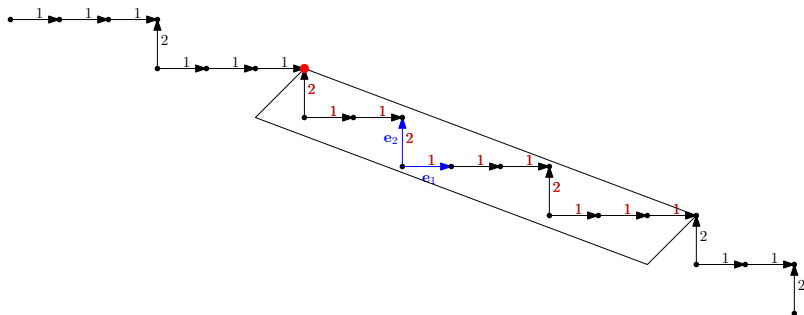
k	0	1	2	3	4
$q^{(k)}$		2	1	2	
$w^{(k)}$	2	1	211	2111	21121112111
$t^{(k)}$	(0,1)	(-1,0)	(-2,1)	(-3,1)	(-8,3)
$l^{(k)}$		(1,0)	(0,1)	(3,0)	(-2,2)



Position d'une extrémité (jambe)

Exemple pour $N(3,8)$

k	0	1	2	3	4
$q^{(k)}$		2	1	2	
$w^{(k)}$	2	1	211	2111	21121112111
$t^{(k)}$	(0,1)	(-1,0)	(-2,1)	(-3,1)	(-8,3)
$l^{(k)}$		(1,0)	(0,1)	(3,0)	(-2,2)



Position des points non extrémaux (corps) par la méthode union/translation

On part de $B^{(1)} = \{(0,0)\}$ et pour $k \geq 2$, on augmente $B^{(k-1)}$ par union avec $q^{(k-1)}$ copies de lui-même, chacune successivement translatées de $-t^{(k-1)}$ si k est pair, ou $t^{(k-1)}$ si k est impair.

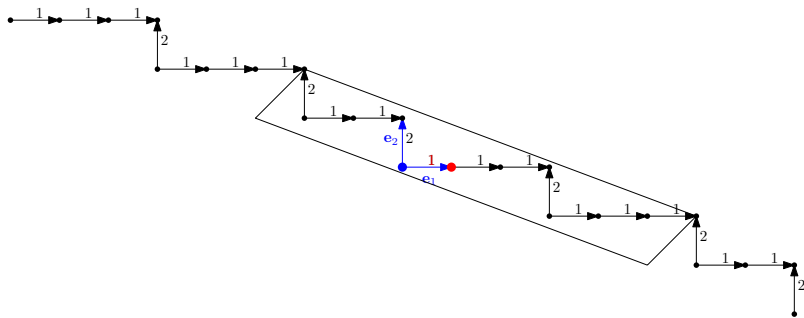
Exemple pour $N(3,8)$

k	0	1	2	3	4
$q^{(k)}$		2	1	2	
$w^{(k)}$	2	1	211	2111	21121112111
$t^{(k)}$	(0,1)	(-1,0)	(-2,1)	(-3,1)	(-8,3)
$l^{(k)}$		(1,0)	(0,1)	(3,0)	(-2,2)

Position des points non extrémaux (corps) par la méthode union/translation

Exemple pour $N(3,8)$

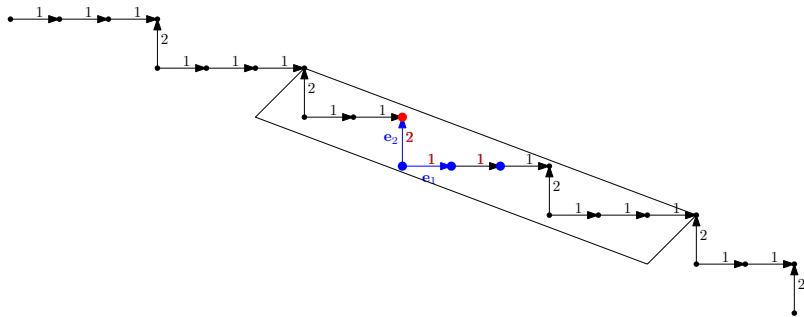
k	0	1	2	3	4
$q^{(k)}$		2	1	2	
$w^{(k)}$	2	1	211	2111	21121112111
$t^{(k)}$	(0,1)	(-1,0)	(-2,1)	(-3,1)	(-8,3)
$l^{(k)}$		(1,0)	(0,1)	(3,0)	(-2,2)



Position des points non extrémaux (corps) par la méthode union/translation

Exemple pour $N(3,8)$

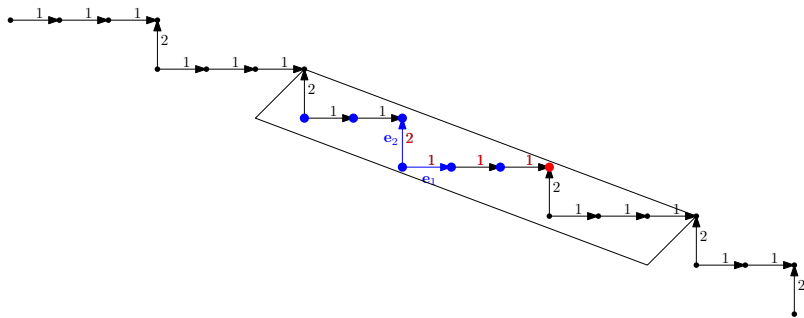
k	0	1	2	3	4
$q^{(k)}$		2	1	2	
$w^{(k)}$	2	1	211	2111	21121112111
$t^{(k)}$	(0,1)	(-1,0)	(-2,1)	(-3,1)	(-8,3)
$l^{(k)}$		(1,0)	(0,1)	(3,0)	(-2,2)



Position des points non extrémaux (corps) par la méthode union/translation

Exemple pour $N(3, 8)$

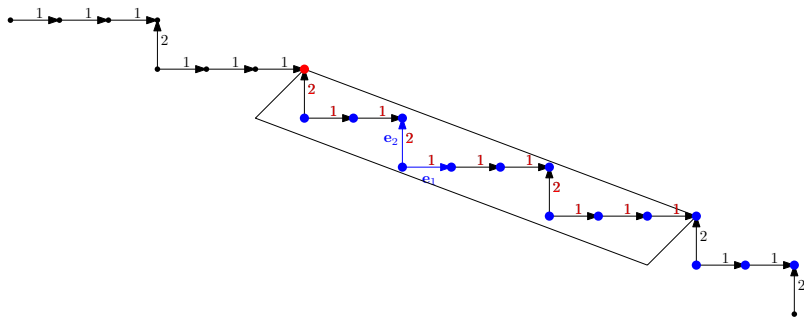
k	0	1	2	3	4
$q^{(k)}$		2	1	2	
$w^{(k)}$	2	1	211	2111	21121112111
$t^{(k)}$	(0,1)	(-1,0)	(-2,1)	(-3,1)	(-8,3)
$l^{(k)}$		(1,0)	(0,1)	(3,0)	(-2,2)



Position des points non extrémaux (corps) par la méthode union/translation

Exemple pour $N(3, 8)$

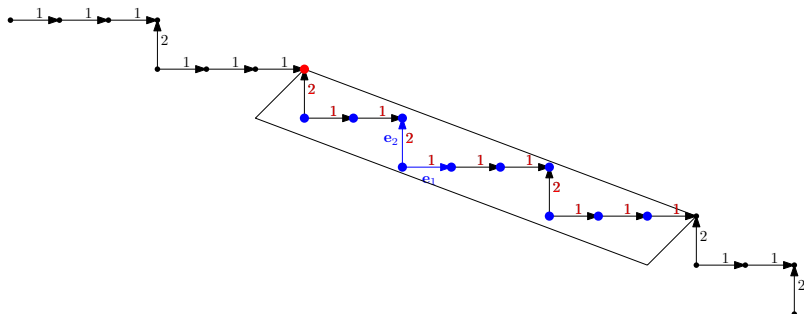
k	0	1	2	3	4
$q^{(k)}$		2	1	2	
$w^{(k)}$	2	1	211	2111	21121112111
$t^{(k)}$	(0,1)	(-1,0)	(-2,1)	(-3,1)	(-8,3)
$l^{(k)}$		(1,0)	(0,1)	(3,0)	(-2,2)



Position des points non extrémaux (corps) par la méthode union/translation

Exemple pour $N(3,8)$

k	0	1	2	3	4
$q^{(k)}$		2	1	1	
$w^{(k)}$	2	1	211	2111	21121112111
$t^{(k)}$	(0,1)	(-1,0)	(-2,1)	(-3,1)	(-8,3)
$l^{(k)}$		(1,0)	(0,1)	(3,0)	(-2,2)



Génération par substitution

On fabrique la séquence de substitutions suivante :

$$\forall k \geq 1 \quad \begin{cases} \sigma^{(k)}(1) = 21^{q^{(k)}}, & \sigma^{(k)}(2) = 2 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \sigma^{(k)}(1) = 1, & \sigma^{(k)}(2) = 21^{q^{(k)}} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Exemple pour $N(3, 8)$, de pente $\frac{8}{3} = [2, 1, 2]$

$$\begin{cases} \sigma^{(1)}(1) = 1 \\ \sigma^{(1)}(2) = 211 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^{(2)}(1) = 21 \\ \sigma^{(2)}(2) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^{(3)}(1) = 1 \\ \sigma^{(3)}(2) = 211 \end{cases}$$

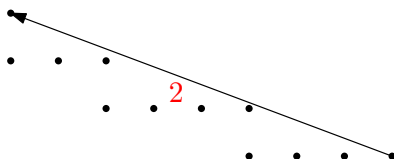
$$\begin{aligned} \sigma^{(1)}(\sigma^{(2)}(\sigma^{(3)}(2))) &= \sigma^{(1)}(\sigma^{(2)}(211)) \\ &= \sigma^{(1)}(2(21)(21)) \\ &= (211)((211)1)((211)1) = w^{(4)}. \end{aligned}$$

Génération par substitution

Exemple pour $N(3, 8)$, de pente $\frac{8}{3} = [2, 1, 2]$

$$\begin{cases} \sigma^{(1)}(1) = 1 \\ \sigma^{(1)}(2) = 211 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^{(2)}(1) = 21 \\ \sigma^{(2)}(2) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^{(3)}(1) = 1 \\ \sigma^{(3)}(2) = 211 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)}(\sigma^{(2)}(\sigma^{(3)}(\mathbf{2}))) &= \sigma^{(1)}(\sigma^{(2)}(211)) \\ &= \sigma^{(1)}(2(21)(21)) \\ &= (211)((211)1)((211)1) = w^{(4)}. \end{aligned}$$

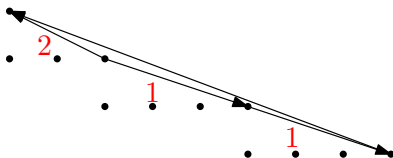


Génération par substitution

Exemple pour $N(3, 8)$, de pente $\frac{8}{3} = [2, 1, 2]$

$$\begin{cases} \sigma^{(1)}(1) = 1 \\ \sigma^{(1)}(2) = 211 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^{(2)}(1) = 21 \\ \sigma^{(2)}(2) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^{(3)}(1) = 1 \\ \sigma^{(3)}(2) = 211 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)}(\sigma^{(2)}(\sigma^{(3)}(2))) &= \sigma^{(1)}(\sigma^{(2)}(\textcolor{red}{211})) \\ &= \sigma^{(1)}(2(21)(21)) \\ &= (211)((211)1)((211)1) = w^{(4)}. \end{aligned}$$

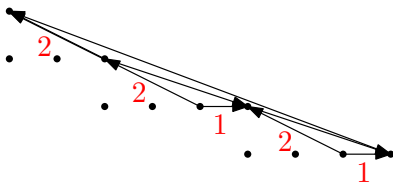


Génération par substitution

Exemple pour $N(3, 8)$, de pente $\frac{8}{3} = [2, 1, 2]$

$$\begin{cases} \sigma^{(1)}(1) = 1 \\ \sigma^{(1)}(2) = 211 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^{(2)}(1) = 21 \\ \sigma^{(2)}(2) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^{(3)}(1) = 1 \\ \sigma^{(3)}(2) = 211 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)}(\sigma^{(2)}(\sigma^{(3)}(2))) &= \sigma^{(1)}(\sigma^{(2)}(211)) \\ &= \sigma^{(1)}(\mathbf{2(21)(21)}) \\ &= (211)((211)1)((211)1) = w^{(4)}. \end{aligned}$$

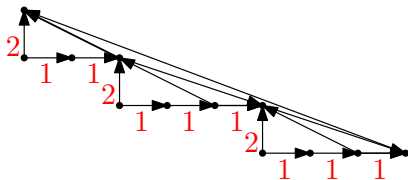


Génération par substitution

Exemple pour $N(3, 8)$, de pente $\frac{8}{3} = [2, 1, 2]$

$$\begin{cases} \sigma^{(1)}(1) = 1 \\ \sigma^{(1)}(2) = 211 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^{(2)}(1) = 21 \\ \sigma^{(2)}(2) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^{(3)}(1) = 1 \\ \sigma^{(3)}(2) = 211 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)}(\sigma^{(2)}(\sigma^{(3)}(2))) &= \sigma^{(1)}(\sigma^{(2)}(211)) \\ &= \sigma^{(1)}(2(21)(21)) \\ &= (211)((211)1)((211)1) = w^{(4)}. \end{aligned}$$



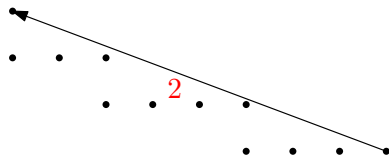
Substitution généralisée par l'exemple

$$E_1(\sigma)(x, i) = \sum_{k=1}^{|\sigma(i)|} \left(M_{\sigma} x + \text{vec}(\text{suf}(\sigma(i), k), \sigma(i)_k) \right),$$

$$\begin{cases} \sigma^{(1)}(1) = 1 \\ \sigma^{(1)}(2) = 211 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^{(2)}(1) = 21 \\ \sigma^{(2)}(2) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^{(3)}(1) = 1 \\ \sigma^{(3)}(2) = 211 \end{cases}$$

$$M_{\sigma}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{\sigma}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{\sigma}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de $E_1(\sigma^{(1)})(E_1(\sigma^{(2)})(E_1(\sigma^{(3)})((0, 0), 2)))$:

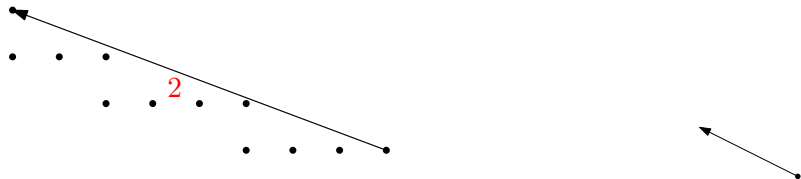


Substitution généralisée par l'exemple

$$E_1(\sigma)(x, i) = \sum_{k=1}^{|\sigma(i)|} \left(M_{\sigma} x + \text{vec}(\text{suf}(\sigma(i), k), \sigma(i)_k) \right),$$

$$\begin{cases} \sigma^{(1)}(1) = 1 \\ \sigma^{(1)}(2) = 211 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^{(2)}(1) = 21 \\ \sigma^{(2)}(2) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^{(3)}(1) = 1 \\ \sigma^{(3)}(2) = 211 \end{cases}$$
$$M_{\sigma}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{\sigma}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{\sigma}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de $E_1(\sigma^{(1)})(E_1(\sigma^{(2)})(E_1(\sigma^{(3)})((0, 0), 2)))$:



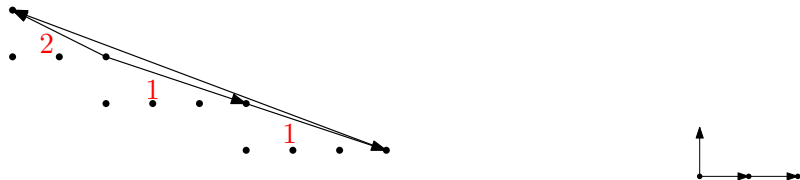
Substitution généralisée par l'exemple

$$E_1(\sigma)(x, i) = \sum_{k=1}^{|\sigma(i)|} \left(M_{\sigma} x + \text{vec}(\text{suf}(\sigma(i), k), \sigma(i)_k) \right),$$

$$\begin{cases} \sigma^{(1)}(1) = 1 \\ \sigma^{(1)}(2) = 211 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^{(2)}(1) = 21 \\ \sigma^{(2)}(2) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^{(3)}(1) = 1 \\ \sigma^{(3)}(2) = 211 \end{cases}$$

$$M_{\sigma}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{\sigma}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{\sigma}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de $E_1(\sigma^{(1)})(E_1(\sigma^{(2)})(E_1(\sigma^{(3)})((0, 0), 2)))$:

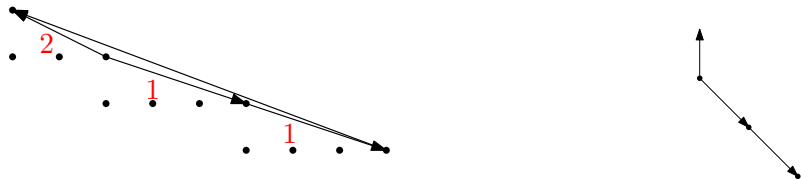


Substitution généralisée par l'exemple

$$E_1(\sigma)(x, i) = \sum_{k=1}^{|\sigma(i)|} \left(M_{\sigma} x + \text{vec}(\text{suf}(\sigma(i), k), \sigma(i)_k) \right),$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{cases} \sigma^{(1)}(1) = 1 \\ \sigma^{(1)}(2) = 211 \end{cases} & \begin{cases} \sigma^{(2)}(1) = 21 \\ \sigma^{(2)}(2) = 2 \end{cases} & \begin{cases} \sigma^{(3)}(1) = 1 \\ \sigma^{(3)}(2) = 211 \end{cases} \\ M_{\sigma}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & M_{\sigma}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & M_{\sigma}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcul de $E_1(\sigma^{(1)})(E_1(\sigma^{(2)})(E_1(\sigma^{(3)})((0, 0), 2)))$:

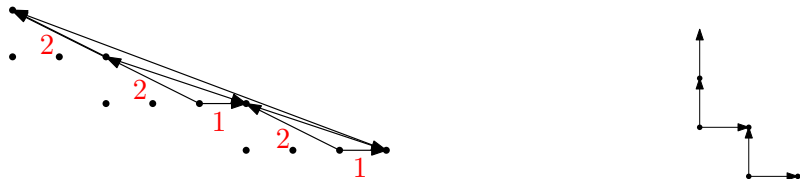


Substitution généralisée par l'exemple

$$E_1(\sigma)(x, i) = \sum_{k=1}^{|\sigma(i)|} \left(M_{\sigma} x + \text{vec}(\text{suf}(\sigma(i), k), \sigma(i)_k) \right),$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{cases} \sigma^{(1)}(1) = 1 \\ \sigma^{(1)}(2) = 211 \end{cases} & \begin{cases} \sigma^{(2)}(1) = 21 \\ \sigma^{(2)}(2) = 2 \end{cases} & \begin{cases} \sigma^{(3)}(1) = 1 \\ \sigma^{(3)}(2) = 211 \end{cases} \\ M_{\sigma}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & M_{\sigma}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & M_{\sigma}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcul de $E_1(\sigma^{(1)})(E_1(\sigma^{(2)})(E_1(\sigma^{(3)})((0, 0), 2)))$:



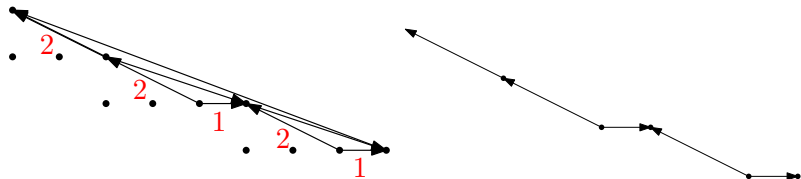
Substitution généralisée par l'exemple

$$E_1(\sigma)(x, i) = \sum_{k=1}^{|\sigma(i)|} \left(M_{\sigma} x + \text{vec}(\text{suf}(\sigma(i), k), \sigma(i)_k) \right),$$

$$\begin{cases} \sigma^{(1)}(1) = 1 \\ \sigma^{(1)}(2) = 211 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^{(2)}(1) = 21 \\ \sigma^{(2)}(2) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^{(3)}(1) = 1 \\ \sigma^{(3)}(2) = 211 \end{cases}$$

$$M_{\sigma}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{\sigma}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{\sigma}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de $E_1(\sigma^{(1)})(E_1(\sigma^{(2)})(E_1(\sigma^{(3)})((0, 0), 2)))$:



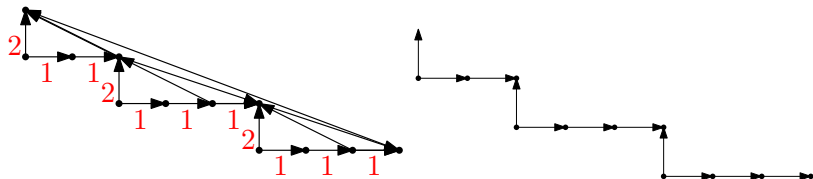
Substitution généralisée par l'exemple

$$E_1(\sigma)(x, i) = \sum_{k=1}^{|\sigma(i)|} \left(M_{\sigma} x + \text{vec}(\text{suf}(\sigma(i), k), \sigma(i)_k) \right),$$

$$\begin{cases} \sigma^{(1)}(1) = 1 \\ \sigma^{(1)}(2) = 211 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^{(2)}(1) = 21 \\ \sigma^{(2)}(2) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^{(3)}(1) = 1 \\ \sigma^{(3)}(2) = 211 \end{cases}$$

$$M_{\sigma}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{\sigma}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{\sigma}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de $E_1(\sigma^{(1)})(E_1(\sigma^{(2)})(E_1(\sigma^{(3)})((0, 0), 2)))$:



Conclusion sur les droites digitales

Une théorie bien connue

- ▶ On connaît parfaitement la structure des droites digitales.
- ▶ Elle est décrite essentiellement par les quotients du développement en fraction continue de sa pente.

Des conséquences pratiques

- ▶ On sait générer efficacement des segments de droites digitales (par blocs ou point par point).
- ▶ On sait reconnaître efficacement des segments de droites digitales (globalement ou incrémentalement).

Outline

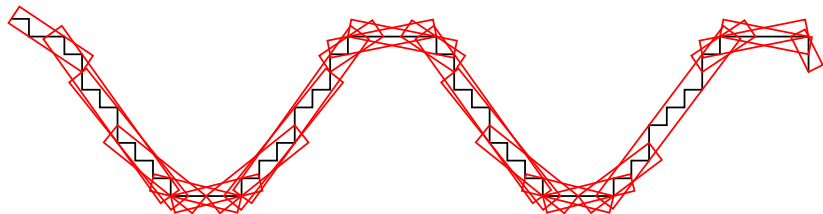
Algorithme d'Euclide

Droite digitale

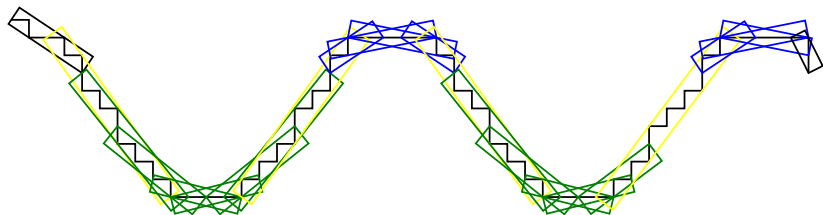
Applications

Extension aux plans digitaux

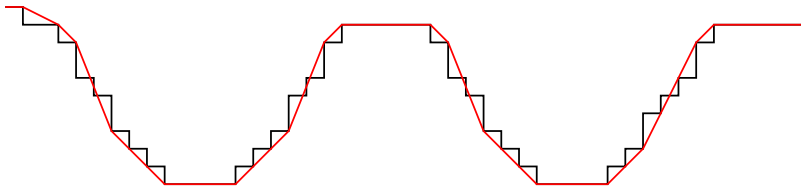
Ensemble des segments maximaux



Parties convexes / concaves

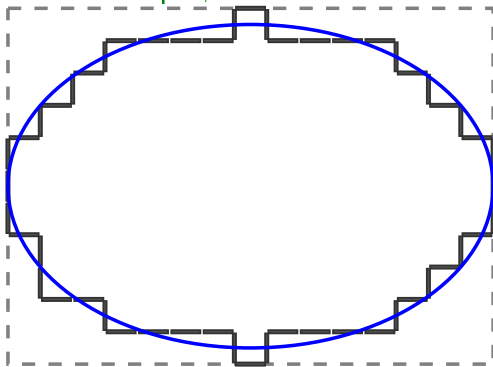


Polygonalisation



Estimation de quantités géométriques globales

Discrétisation d'une ellipse, $h = 0.8$

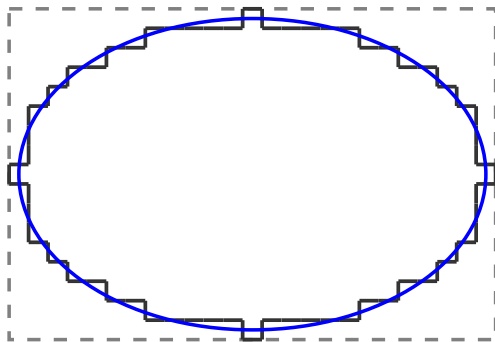


Propriété de convergence multigrille

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\hat{Q}(D(\mathcal{X})) - Q(\mathcal{X})| = 0.$$

Estimation de quantités géométriques globales

Discrétisation d'une ellipse, $h = 0.5$

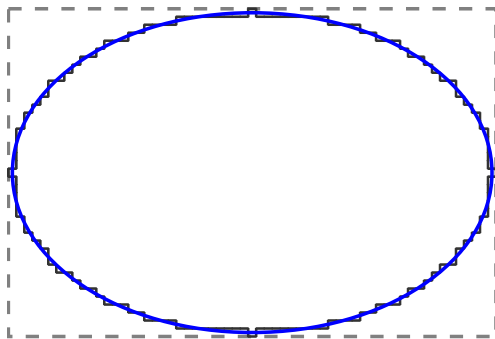


Propriété de convergence multigrille

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\hat{Q}(D(\mathcal{X})) - Q(\mathcal{X})| = 0.$$

Estimation de quantités géométriques globales

Discrétisation d'une ellipse, $h = 0.2$

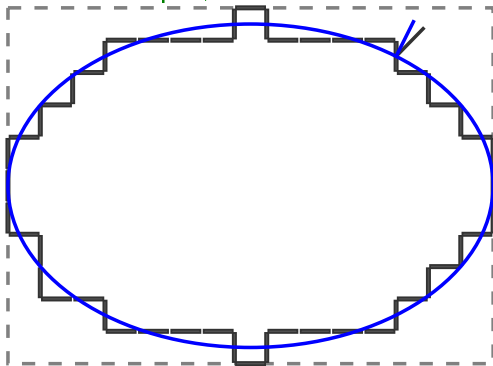


Propriété de convergence multigrille

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\hat{Q}(D(\mathcal{X})) - Q(\mathcal{X})| = 0.$$

Estimation de quantités géométriques locales (ex. normales)

Discrétisation d'une ellipse, $h = 0.8$

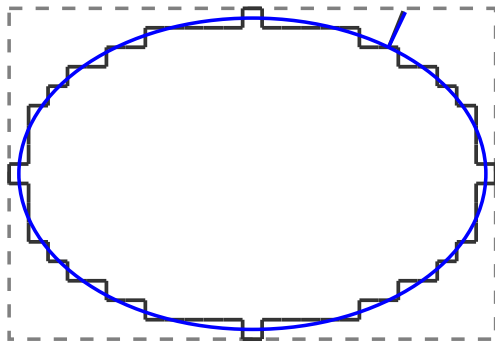


Propriété de convergence multigrille

$$\forall x \in \mathcal{X}, \exists y \in D(\mathcal{X}) \text{ tel que } \|x - y\|_1 \leq h \text{ et} \\ \lim_{h \rightarrow 0} |\hat{Q}(D(\mathcal{X}), y) - Q(\mathcal{X}, x)| = 0$$

Estimation de quantités géométriques locales (ex. normales)

Discrétisation d'une ellipse, $h = 0.5$

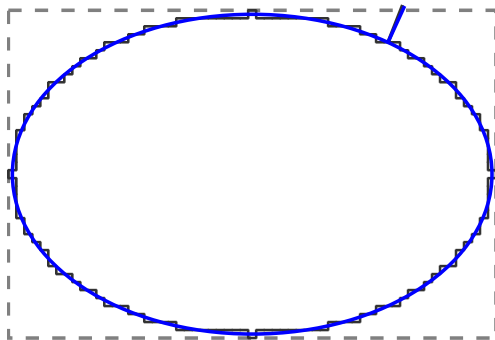


Propriété de convergence multigrille

$$\forall x \in \mathcal{X}, \exists y \in D(\mathcal{X}) \text{ tel que } \|x - y\|_1 \leq h \text{ et} \\ \lim_{h \rightarrow 0} |\hat{Q}(D(\mathcal{X}), y) - Q(\mathcal{X}, x)| = 0$$

Estimation de quantités géométriques locales (ex. normales)

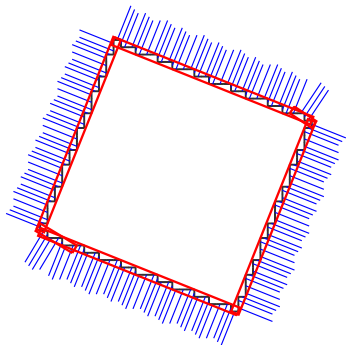
Discrétisation d'une ellipse, $h = 0.2$



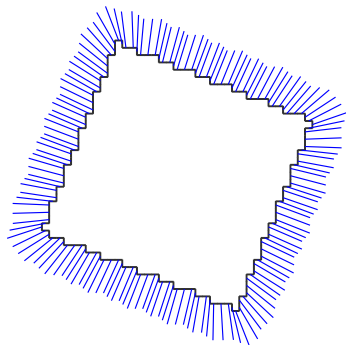
Propriété de convergence multigrille

$$\forall x \in \mathcal{X}, \exists y \in D(\mathcal{X}) \text{ tel que } \|x - y\|_1 \leq h \text{ et} \\ \lim_{h \rightarrow 0} |\hat{Q}(D(\mathcal{X}), y) - Q(\mathcal{X}, x)| = 0$$

Estimation de normales par segments maximaux



(a) seg. max.



(b) convolution

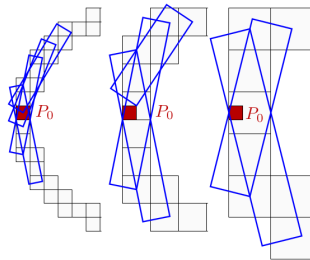
- convergence en $O(h^{\frac{1}{3}})$,
- préserve la convexité/concavité locale, les angles vifs,
- aucun paramètre utilisateur.

Détection de bruit

Itérativement sous-échantillonner par deux le contour et calculer la longueur (discrète) des segments maximaux $(L_k^{h_i})_{k=1\dots l_i}$.

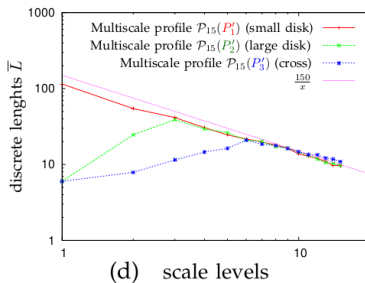
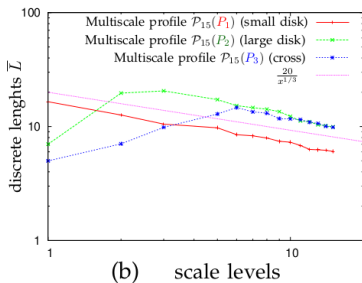
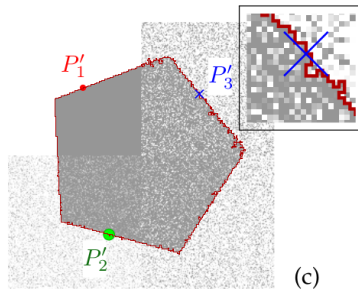
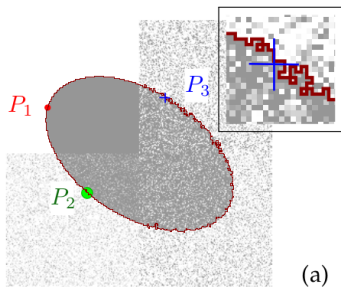
Si le point d'indice k se trouve sur une zone ...

- ▶ plate : $\Omega(h^{-1}) \leq L_k^{h_i} \leq O(h^{-1})$,
- ▶ courbe : $\Omega(h^{-\frac{1}{3}}) \leq L_k^{h_i} \leq O(h^{-\frac{1}{2}})$.



B. Kerautret, J.-O. Lachaud. Meaningful Scales Detection along Digital Contours for Unsupervised Local Noise Estimation. IEEE PAMI, 2012, 34 (12), pp.2379–2392.

Profiles multi-échelles



Outline

Algorithme d'Euclide

Droite digitale

Applications

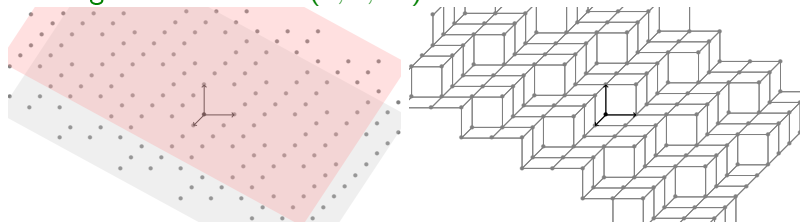
Extension aux plans digitaux

Plan digital

$$P(\mathbf{N}, \mu) = \{x \in \mathbb{Z}^3 \mid \mu \leq x \cdot \mathbf{N} < \mu + \omega\}.$$

- ▶ vecteur normal $\mathbf{N}(a, b, c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $\gcd(a, b, c) = 1$, on suppose que $0 < a \leq b$ et on note l'épaisseur $\omega := \|\mathbf{N}\|_1$.
- ▶ décalage à l'origine $\mu \in \mathbb{Z}$, on suppose $\mu = 0$.

Plan digital de normale $(2, 6, 15)$



Algorithmes de fraction continue multidimensionnelle (MCF)

Il n'existe pas une extension 3d de la version additive de l'algorithme d'Euclide, mais d'innombrables !

En supposant que $0 \leq a \leq b \leq c$:

- ▶ *Brun* : $(a, b, c) \rightarrow (a, b, c - b)$;
- ▶ *Selmer* : $(a, b, c) \rightarrow (a, b, c - a)$;
- ▶ *Fully-Subtractive* : $(a, b, c) \rightarrow (a, b - a, c - a)$;
- ▶ *Poincaré* : $(a, b, c) \rightarrow (a, b - a, c - b)$.
- ▶ ...

Défis pour la génération de motifs

1. inclus dans le plan $P(\mathbf{N})$,
2. assez grand : on doit pouvoir retrouver $\mathbf{N}$ à partir du motif et paver $P(\mathbf{N})$ par translation,
3. (ensemble) minimal – tout en vérifiant (1),
4. (topologie) connexe, sans trou,
5. (géométrie) pas trop allongé,
6. (géométrie) relié à un modèle de discrétisation,
7. (algorithmique) hiérarchique.

Solutions existantes

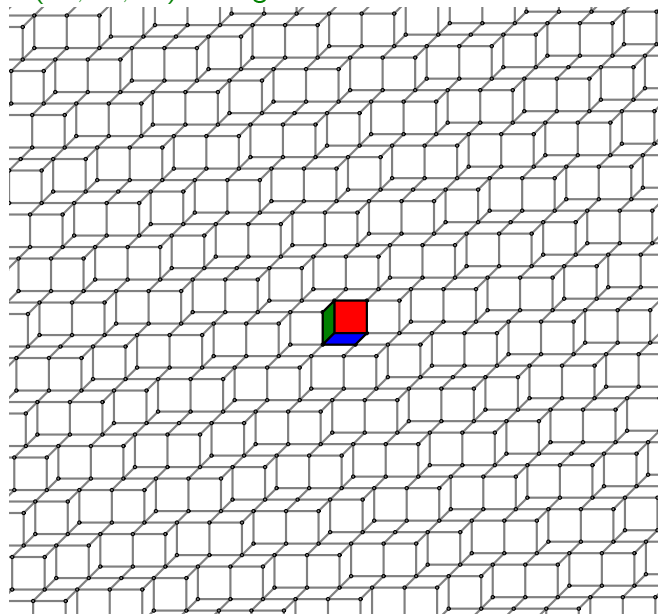
Il existe des versions 3d des méthodes précédentes

- ▶ union/translation,
- ▶ substitution généralisée,
- ▶ concaténation.

Elles prennent en entrée un MCF, appliqué à un vecteur normal $\mathbf{N}$ et retournent un motif, mais sans contrôle sur ses propriétés.

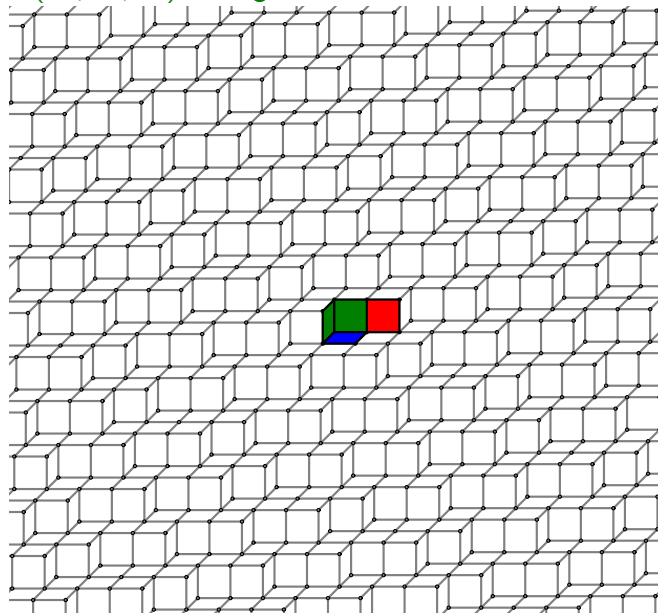
Exemple par concaténation

$N(33, 19, 55)$, H-alg.



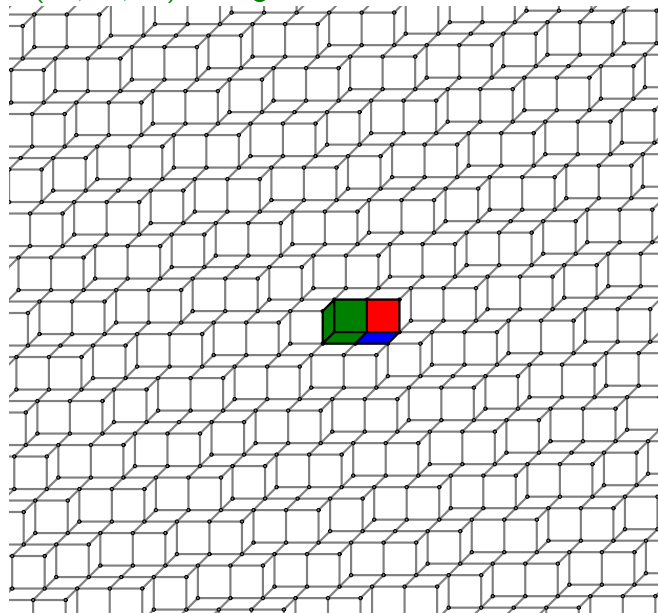
Exemple par concaténation

$N(33, 19, 55)$, H-alg.



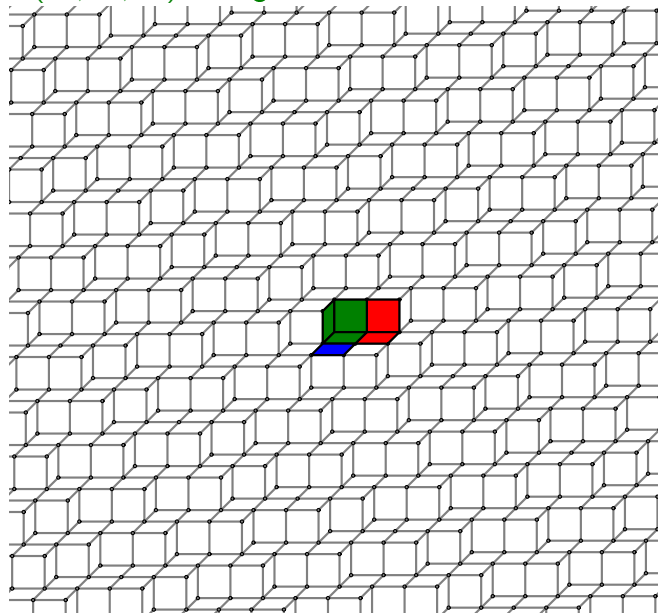
Exemple par concaténation

$N(33, 19, 55)$, H-alg.



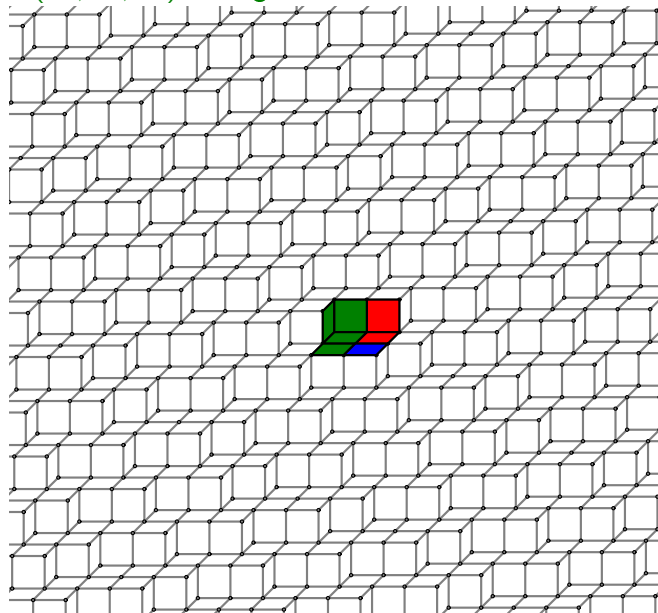
Exemple par concaténation

$N(33, 19, 55)$, H-alg.



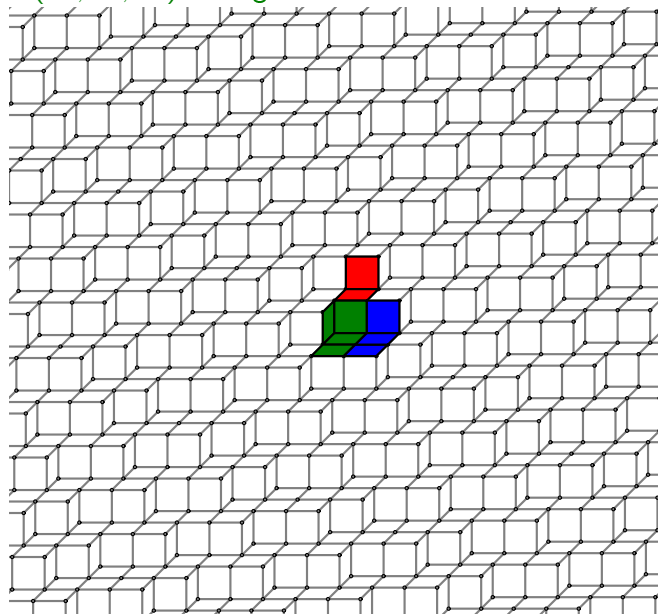
Exemple par concaténation

$N(33, 19, 55)$, H-alg.



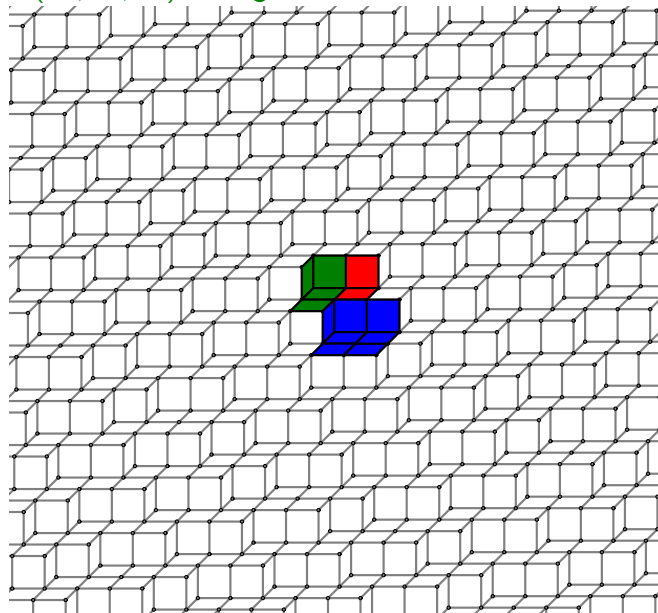
Exemple par concaténation

$N(33, 19, 55)$, H-alg.



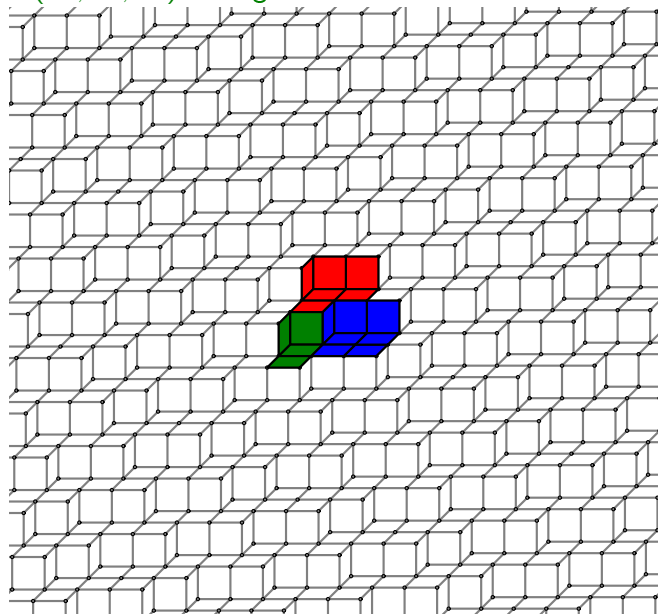
Exemple par concaténation

$N(33, 19, 55)$, H-alg.



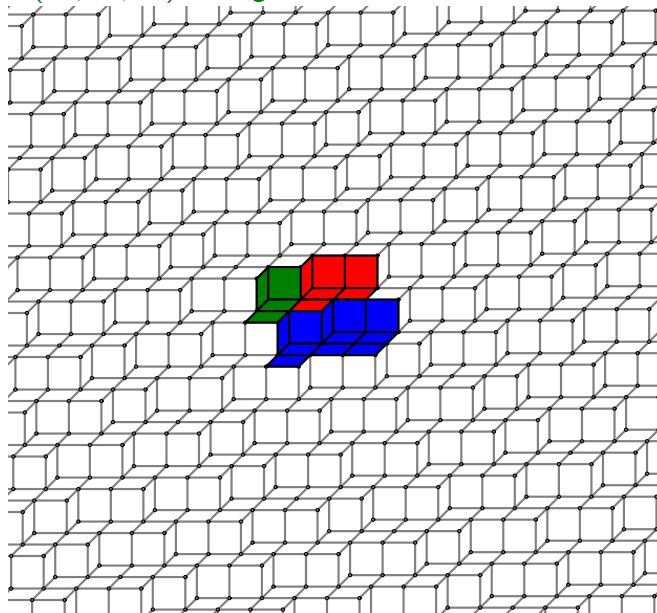
Exemple par concaténation

$N(33, 19, 55)$, H-alg.



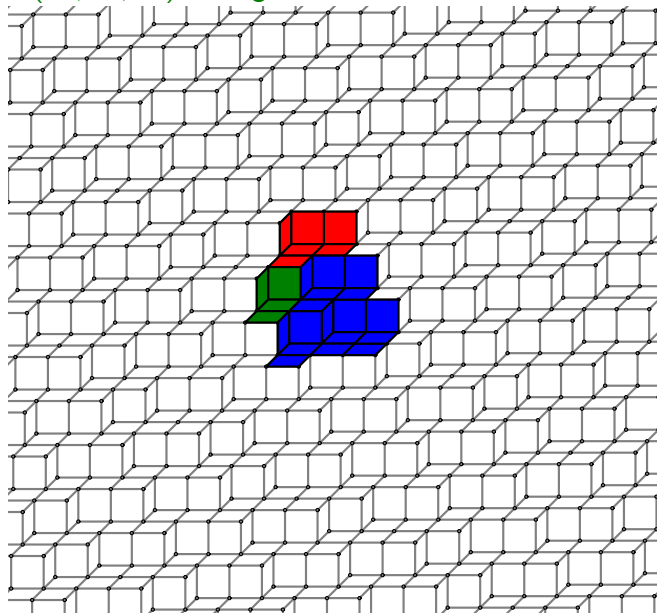
Exemple par concaténation

$N(33, 19, 55)$, H-alg.



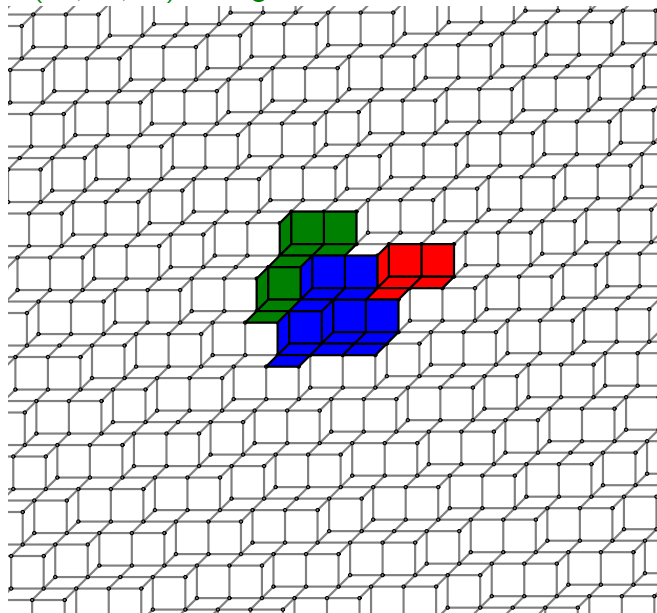
Exemple par concaténation

$N(33, 19, 55)$, H-alg.



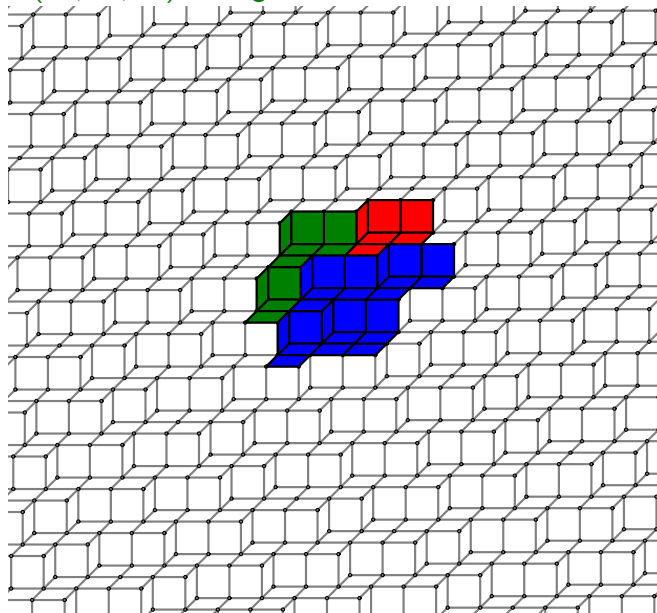
Exemple par concaténation

$N(33, 19, 55)$, H-alg.



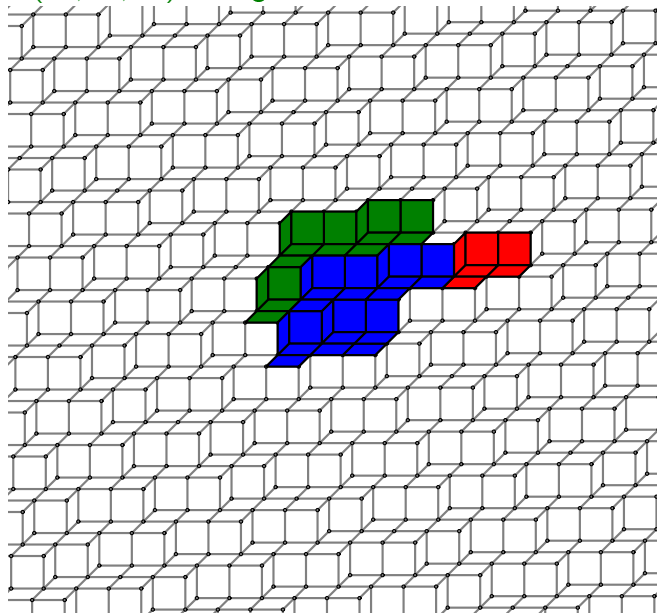
Exemple par concaténation

$N(33, 19, 55)$, H-alg.



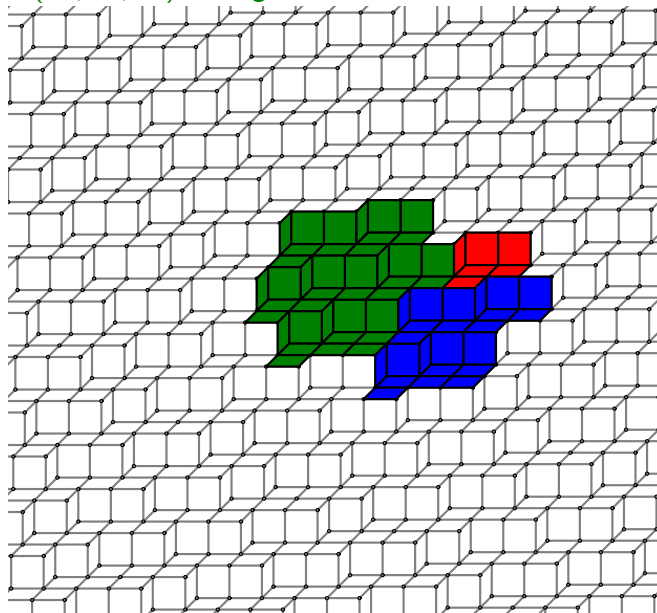
Exemple par concaténation

$N(33, 19, 55)$, H-alg.



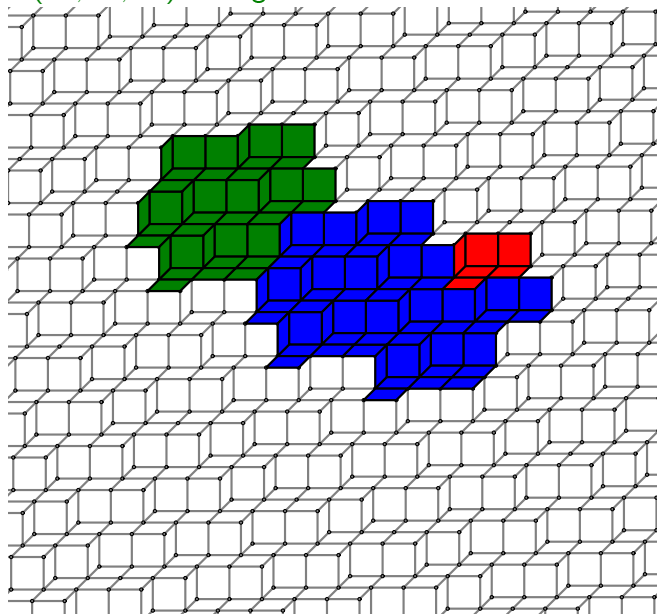
Exemple par concaténation

$N(33, 19, 55)$, H-alg.



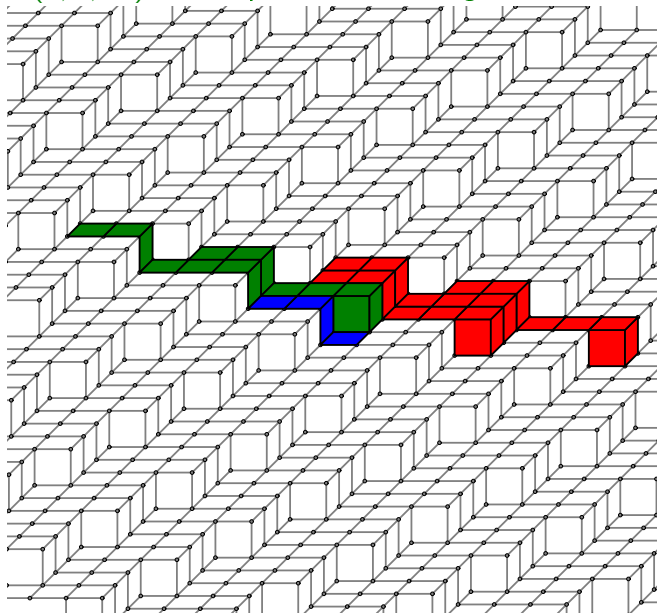
Exemple par concaténation

$N(33, 19, 55)$, H-alg.



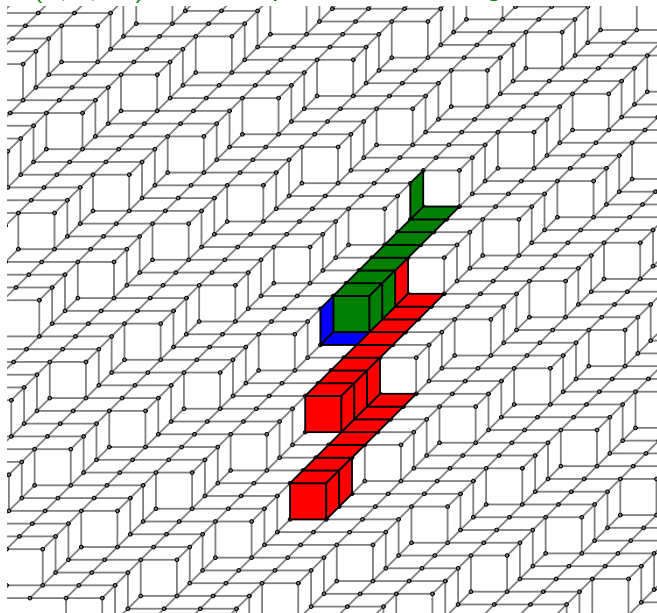
Comparaisons (1/3)

$N(2, 6, 15)$, Brun, par substitution généralisée



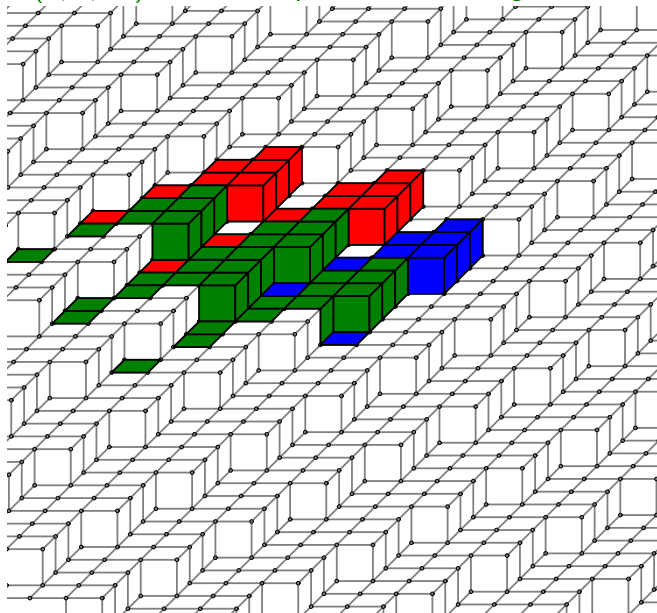
Comparaisons (1/3)

$N(2, 6, 15)$, Selmer, par substitution généralisée



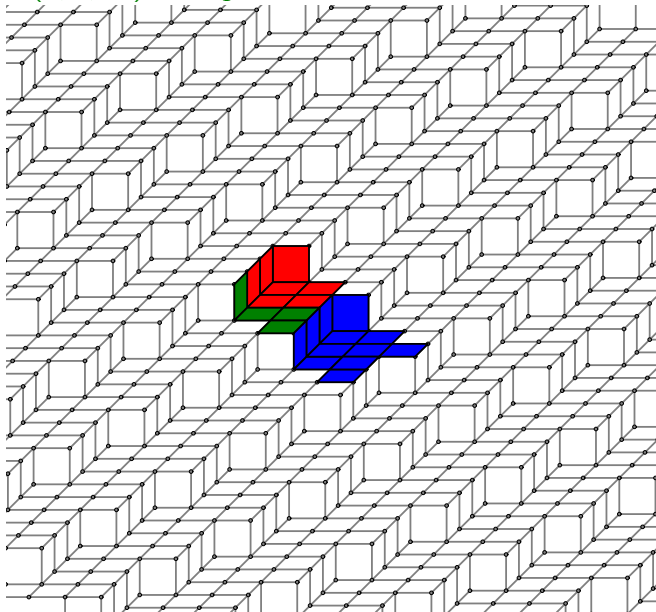
Comparaisons (1/3)

$N(2, 6, 15)$, Poincaré, par substitution généralisée



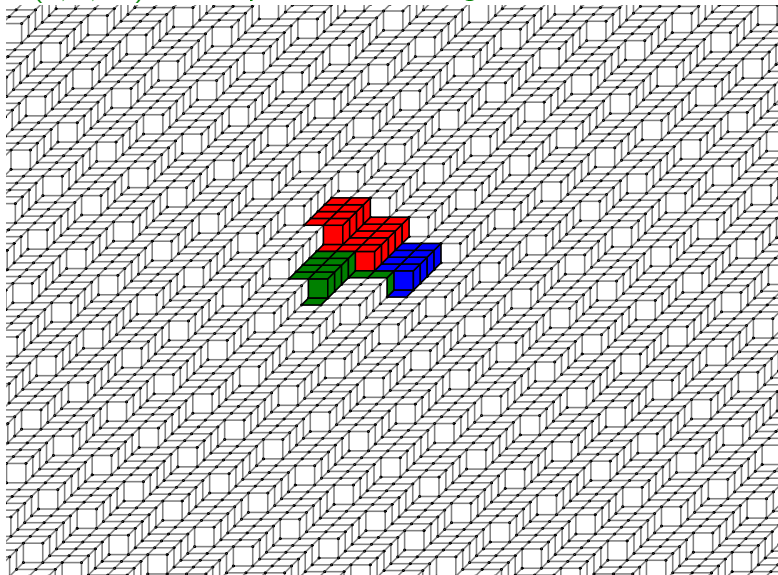
Comparaisons (1/3)

$N(2, 6, 15)$, H-alg., par concaténation



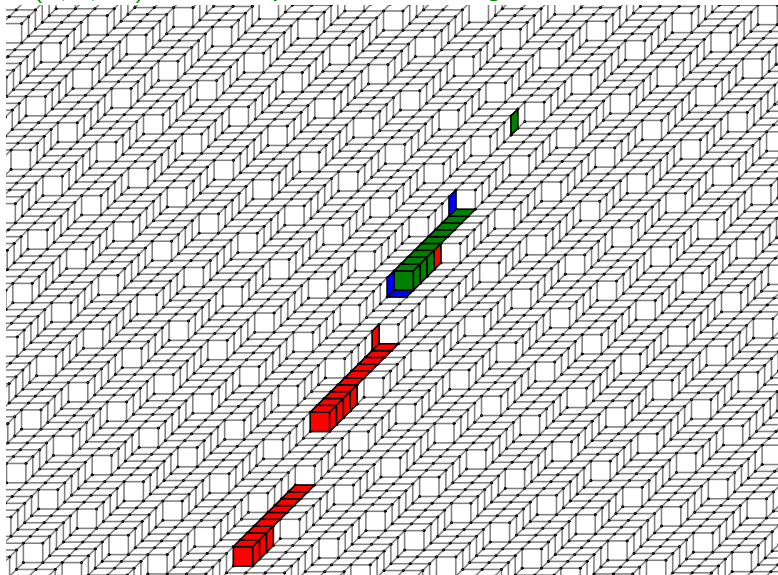
Comparaisons (2/3)

$N(2, 9, 19)$, Brun, par substitution généralisée



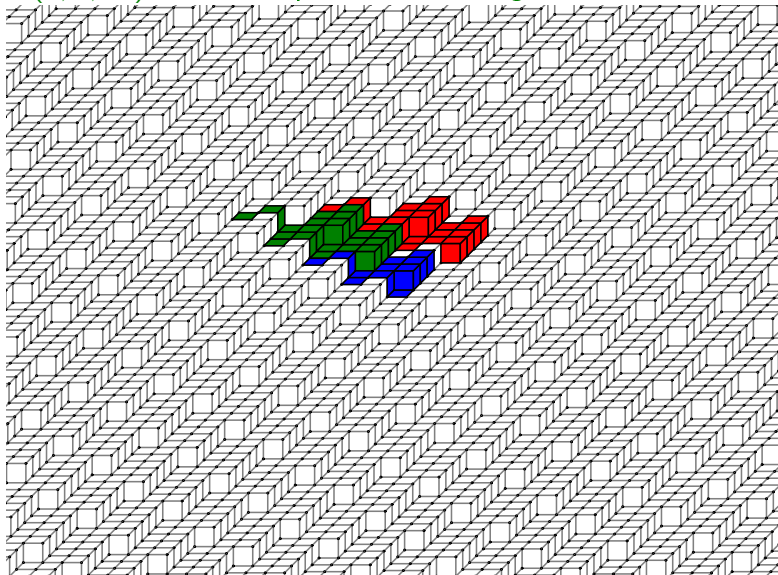
Comparaisons (2/3)

$N(2, 9, 19)$, Selmer, par substitution généralisée



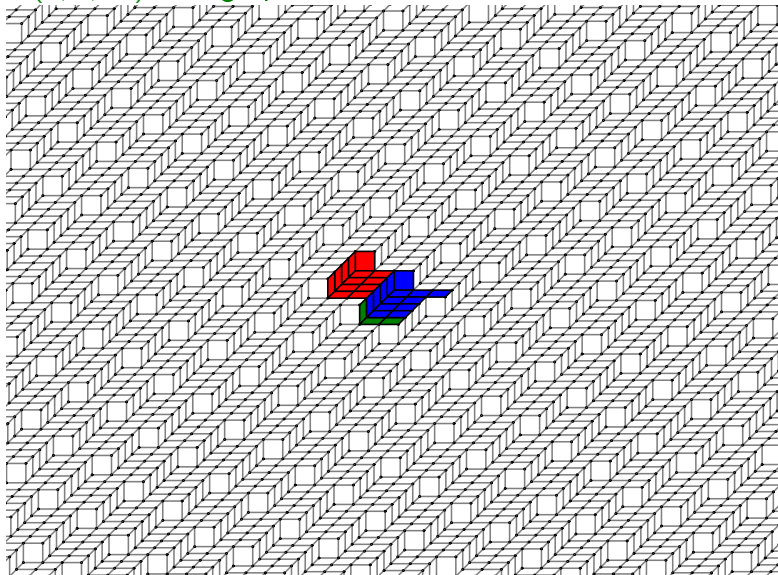
Comparaisons (2/3)

$N(2, 9, 19)$, Poincaré, par substitution généralisée



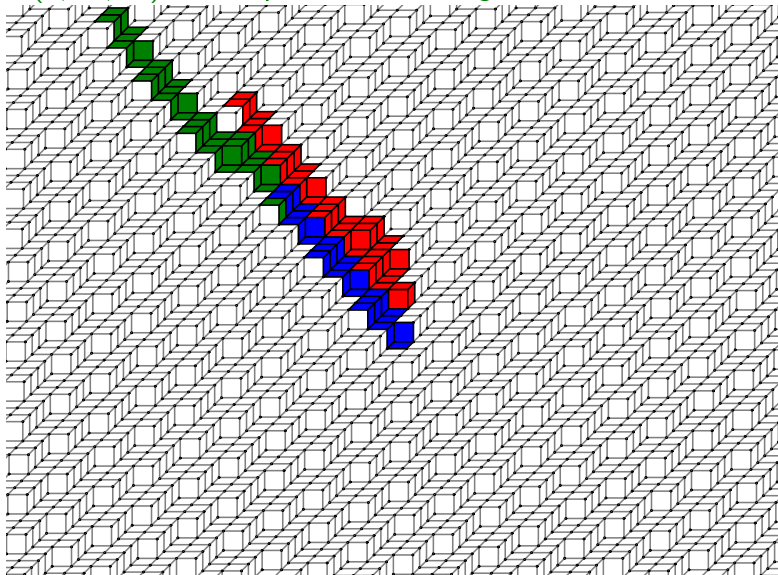
Comparaisons (2/3)

$N(2, 9, 19)$, H-alg., par concaténation



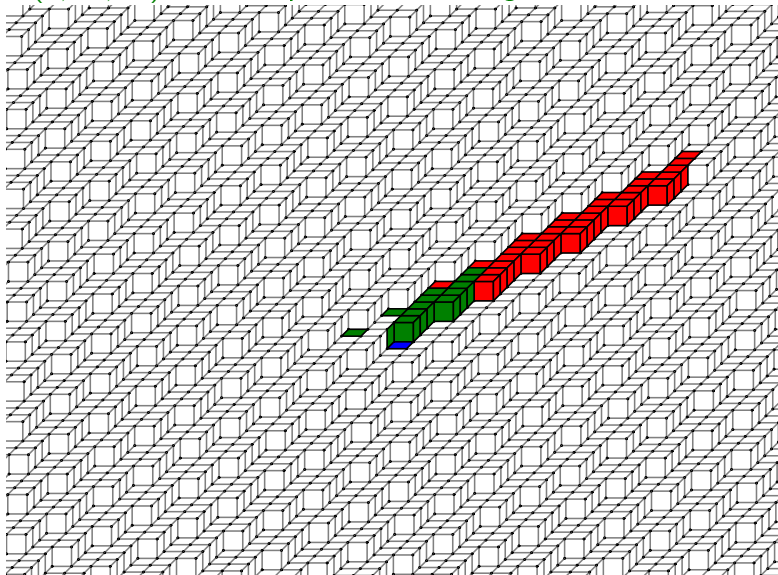
Comparaisons (3/3)

$N(5, 17, 31)$, Brun, par substitution généralisée



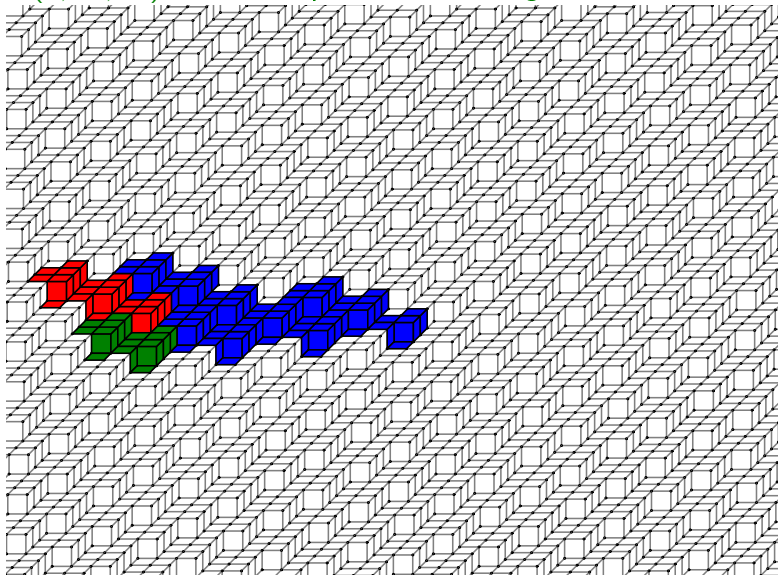
Comparaisons (3/3)

$N(5, 17, 31)$, Selmer, par substitution généralisée



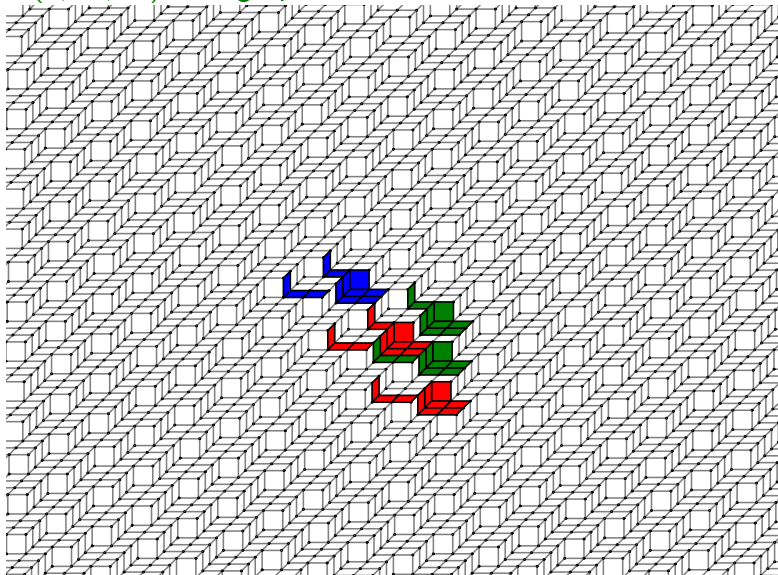
Comparaisons (3/3)

$N(5, 17, 31)$, Poincaré, par substitution généralisée



Comparaisons (3/3)

$N(5, 17, 31)$, H-alg., par concaténation



Ce qu'il reste à faire

1. inclus dans le plan $P(\mathbf{N})$,
2. assez grand : on doit pouvoir retrouver $\mathbf{N}$ à partir du motif et paver $P(\mathbf{N})$ par translation,
3. (ensemble) minimal – tout en vérifiant (1),
4. (topologie) connexe, sans trou,
5. (géométrie) pas trop allongé,
6. (géométrie) relié à un modèle de discrétisation,
7. (algorithmique) hiérarchique.